Niniejszy dokument stanowi polskie tłumaczenie artykułu Jana Rychlewskiego pt. Zur Abschatzung der Anisotropie ZAMM•Z. Angew.Math.u.Mech. **65** (1985) **6**, 256-258, https://doi.org/10.1002/zamm.19850650617.
Opublikowano za zgodą John Wiley & Sons Inc. Tłumacz: Andrzej Ziółkowski, kwiecień 2020, Warszawa.
Niniejszy dokument polskiego tłumaczenia ma numer referencyjny: DOI 10.31224/osf.io/4hr2b

RYCHLEWSKI, J.

O szacowaniu Anizotropii

1. W fizyce ośrodków ciągłych, fizyce kryształów i pokrewnych dziedzinach właściwości badanych obiektów są opisywane za pomocą tensorów Euklidesowych różnego rzędu (patrz np. [1–4], itp.). Symetria i asymetria opisywanych właściwości fizycznych manifestuje się poprzez zmianę tych tensorów na skutek poddawania ich obrotom w pierwotnej przestrzeni fizycznej. Jeśli tensor nie zmienia się przy dowolnym obrocie, to nazywa się go *izotropowym* (przy nieparzystym rzędzie *hemitropowym*). W przeciwnym razie tensor jest *anizotropowy*.

Im wyższy jest rząd tensora, tym bardziej skomplikowany jest opis jego anizotropii, tzn. jego zmiany przy obrotach. W przypadku niektórych problemów praktycznych przydatna jest znajomość pewnych całościowych numerycznych kryteriów anizotropii, za pomocą których tensory można porównać – nawet jeśli tylko wstępnie i z grubsza, jednak w prosty sposób – a następnie uporządkować według ich stopnia anizotropii. Szacunki tego rodzaju mogą na przykład być użyte, jako parametry w równaniach konstytutywnych mediów o zadanej lub zależnej od procesu anizotropii. W pracy [5] szacunki takie zostały dokonane dla zbadania anizotropii własności dielektrycznych i sprężystych.

Proponujemy tutaj kilka całkiem naturalnych sposobów szacowania anizotropii tensorów dowolnego rzędu. Wynikają one z dobrze znanych konstrukcji geometrycznych.

2. Rozważana jest przestrzeń tensorów euklidesowych rzędu (walencji) p

$$T_p \equiv E \otimes \ldots \otimes E \quad (p - razy), \tag{2.1}$$

gdzie E oznacza elementarną trójwymiarową Euklidesową przestrzeń wektorową. Grupę obrotów w E oznaczamy symbolem $\mathcal{R}$. Jak zwykle obroty są utożsamiane z tensorami ortogonalnymi drugiego rzędu $\boldsymbol{R}$. Obrót $\boldsymbol{R}$ przekształca wektor $\boldsymbol{a} \in E$ w wektor $\boldsymbol{Ra} \in E$, przy czym zachowana jest liniowość i iloczyn skalarny wektorów, tj. $(\boldsymbol{Ra})(\boldsymbol{Rb}) = \boldsymbol{ab}$ dla każdego $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$, $\boldsymbol{R} \in \mathcal{R}$. Grupa $\mathcal{R}$ działa w T_p,

$$\boldsymbol{A} \in T_p \rightarrow \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A} \in T_p, \tag{2.2}$$

przy czym liniowy operator $\boldsymbol{R}*$ działa na poddawany mu tensor zgodnie ze wzorem,

$$\boldsymbol{R} * (\boldsymbol{a}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{a}_p) = \boldsymbol{Ra}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{Ra}_p, \tag{2.3}$$

Stąd wynika tożsamość $\boldsymbol{R}_1 * (\boldsymbol{R}_2 * \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2) * \boldsymbol{A}$ dla wszystkich $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2 \in \mathcal{R}$, $\boldsymbol{A} \in T_p$ tj. $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}*$ jest *Reprezentacją* grupy $\mathcal{R}$ w 3^p-wymiarowej przestrzeni liniowej

Forma biliniowa

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leftrightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}, \tag{2.4}$$

zdefiniowana dla tensorów na których działa zgodnie ze wzorem

$$(\boldsymbol{a}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{a}_p) \cdot (\boldsymbol{b}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{b}_p) = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1) \otimes \ldots \otimes (\boldsymbol{a}_p \boldsymbol{b}_p), \tag{2.5}$$

jest dobrze określonym iloczynem skalarnym w T_p. Generuje ona *normę* i *odległość*

$$|\boldsymbol{A}| \equiv (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})^{1/2}, \quad \rho(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \equiv |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|, \tag{2.6}$$

Iloczyn skalarny (2.4), i tym samym także norma i odległość są niezmiennicze względem dowolnego obrotu, tj.

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{R}*\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{R}*\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \quad |\boldsymbol{R}*\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|, \\ \rho(\boldsymbol{R}*\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}*\boldsymbol{B}) = \rho(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\end{array}\right\}, \tag{2.7}$$

dla wszystkich $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in T_p$, $\boldsymbol{R} \in \mathcal{R}$.

W T_p działa jeszcze jedna grupa, grupa Σ_p permutacji p pierwszych liczb naturalnych, $\sigma \in \Sigma_p$:

$$\boldsymbol{A} \in T_p \to \sigma \times \boldsymbol{A} \in T_p. \tag{2.8}$$

Wprowadzony tutaj operator liniowy $\sigma\times$ działa na poddawane mu tensory zgodnie ze wzorem,

$$\sigma \times (\boldsymbol{a}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{a}_p) \equiv \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{a}_{\sigma(p)}. \tag{2.9}$$

3. Przejdźmy do rzeczy. Jak stwierdzono tensor $\boldsymbol{A}$ nazywany jest izotropowym (dla $p = 2n+1$ *hemitropowym*), jeśli

$$\boldsymbol{R}*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \text{ dla jakiegokolwiek } \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}, \tag{3.1}$$

I odwrotnie, jeśli

$$\boldsymbol{R}*\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A} \text{ dla przynajmniej jednego } \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}, \tag{3.2}$$

wtedy $\boldsymbol{A}$ nazywany jest tensorem *anizotropowym*.

Proponujemy następujący opis tensorów anizotropowych. Zbiór wszystkich izotropowych tensorów rzędu p tworzy pewną liniową podprzestrzeń $\mathcal{J}_p$ w przestrzeni T_p. Wymiar dim $\mathcal{J}_p$ jest znany dla wszystkich p [6]; należy zauważyć, że dim $\mathcal{J}_p \geq 1$ dla wszystkich $p > 1$. Baza w $\mathcal{J}_{2n}$ zbudowana jest z tensorów postaci

$$\sigma \times (\mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}), \quad \sigma \in \Sigma_{2n}, \tag{3.3}$$

gdzie $\mathbf{1} \in T_2$ oznacza tensor jednostkowy, zaś baza w $\mathcal{J}_{2n+1}$ składa się z tensorów postaci,

$$\sigma \times (\boldsymbol{E} \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}), \quad \sigma \in \Sigma_{2n+1}, \tag{3.4}$$

gdzie $\boldsymbol{E} \in T_3$ oznacza tensor *Ricci'ego* [7].

Prostopadłe dopełnienie przestrzeni tensorów izotropowych $\mathcal{J}_p$ w T_p oznaczamy przez $\mathcal{A}_p$,

$$T_p = \mathcal{J}_p \oplus \mathcal{A}_p, \quad \mathcal{J}_p \perp \mathcal{A}_p. \tag{3.5}$$

Obie podprzestrzenie tej sumy prostej są podprzestrzeniami tensorowymi, tj. są niezmiennicze względem wszystkich obrotów. Odpowiedni (jawny) rozkład tensora zapisujemy w postaci

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} + \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} \in I_p, \quad \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{A}_p, \tag{3.6}$$

gdzie

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} = 0, \quad |\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}|^2 + |\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2. \tag{3.7}$$

Składową $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$ nazywamy *izotropową częścią* tensora $\boldsymbol{A}$. Tensor jest anizotropowy wtedy i tylko wtedy, gdy jego *część anizotropowa* jest różna od zera, tj. gdy $\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} \neq 0$.

Zgodnie ze znaną graniczną własnością projekcji ortogonalnej $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$, izotropowa część tensora $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$ jest najbliższym izotropowym tensorem w otoczeniu tensora $\boldsymbol{A}$,

$$\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}) = \min_{\boldsymbol{X} \in \mathcal{J}_p} \rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}), \tag{3.8}$$

To twierdzenie ma następujące znaczenie fizyczne: $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$ jest *izotropowym sąsiedztwem* tensora $\boldsymbol{A}$.

Jeśli $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \dots, \boldsymbol{I}_m$ $(m = \dim \mathcal{J}_p)$ jest bazą w $\mathcal{J}_p$, wtedy jest

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} = a_1 \boldsymbol{I}_1 + a_2 \boldsymbol{I}_2 + \dots + a_p \boldsymbol{I}_p, \tag{3.9}$$

przy czym współczynniki wyznacza się z układu równań

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{I}_i \cdot \boldsymbol{I}_k) a_k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I}_i, \tag{3.10}$$

Poprzez rozwiązanie tego układu otrzymujemy $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$, a następnie także

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} \equiv \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}. \tag{3.11}$$

Należy zauważyć, że norma części anizotropowej tensora jest także jego odległością od $\mathcal{J}_p$:

$$|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}| = \rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}). \tag{3.12}$$

Rozpatrzymy pierwsze cztery rzędy $p = 1, 2, 3, 4$.

$\underline{p = 1}$: $\dim \mathcal{J}_p = 0$, tzn. jedynym wektorem izotropowym jest $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ i dlatego

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathcal{A}} \text{ dla każdego } \boldsymbol{a} \in T_1. \tag{3.13}$$

$\underline{p = 2}$: $\dim \mathcal{J}_p = 1$, bazę dla $\mathcal{J}_2$ stanowi tensor jednostkowy $\mathbf{1}$, a zatem dla każdego $\boldsymbol{\omega} \in T_2$, obowiązuje relacja $\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{J}} = a\mathbf{1}$. Jest $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = 3$ i $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1} = tr\boldsymbol{\omega}$, dostajemy więc,

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{J}} = \tfrac{1}{3}(tr\boldsymbol{\omega})\mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\omega} - \tfrac{1}{3}(tr\boldsymbol{\omega})\mathbf{1}, \tag{3.14}$$

i w konsekwencji

$$|\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}}| = (\omega_{ij}\omega_{ij} - \tfrac{1}{3}\omega_{ii}\omega_{jj})^{1/2}. \tag{3.15}$$

Dla tensorów symetrycznych $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ rozkład na $\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}}$ jest znany, część anizotropową tensorów symetrycznych drugiego rzędu stanowi ich dewiator. Dlatego jest,

$$|\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}}| = \sqrt{(1/3)[(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2 + (\omega_1 - \omega_3)^2]}.^{1} \tag{3.16}$$

[1] Przyp. tłum. Skorygowano niepoprawny oryginalny wzór $|\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}}| = \sqrt{3}[(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2 + (\omega_1 - \omega_3)^2]^{1/2}$.

gdzie $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, oznaczają wartości własne $\boldsymbol{\omega}$.

$p=3$: dim $\mathcal{J}_3 = 1$, bazę $\mathcal{J}_3$ generuje tensor $\boldsymbol{E}$. W związku z tym jest $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} = a\boldsymbol{E}$, i ponieważ $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} = 6$ więc mamy

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} = \tfrac{1}{6}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{6}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}\,. \tag{3.17}$$

Wynika z tego, że

$$|\,\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}\,| = [A_{ijk}A_{ijk} - \tfrac{1}{6}(\varepsilon_{ijk}A_{ijk})^2]^{1/2}, \tag{3.18}$$

gdzie ε_{ijk} oznacza reprezentację tensora Ricci'ego $\boldsymbol{E}$.

$p=4$: dim $\mathcal{J}_4 = 3$, Bazę $\mathcal{J}_4$ generują na przykład tensory

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{K}, \quad \boldsymbol{I}_2 = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}), \quad \boldsymbol{I}_3 = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{M}), \tag{3.19}$$

gdzie ($\boldsymbol{K} \equiv \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, $\boldsymbol{L} \equiv \,<2,3>\times\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, $\boldsymbol{M} \equiv \,<2,4>\times\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ – por. (2.9), przyp. tłum.)

$$K_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad L_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad M_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{kj}\,. \tag{3.20}$$

Łatwo jest udowodnić następujące relacje:

$$(\boldsymbol{I}_i\cdot\boldsymbol{I}_k) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Postać

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} = a_1\boldsymbol{I}_1 + a_2\boldsymbol{I}_2 + a_3\boldsymbol{I}_3, \tag{3.22}$$

otrzymuje się z rozwiązania układu równań (3.10), gdzie

$$a_1 = \tfrac{1}{30}[4\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M})], \quad a_2 = \tfrac{1}{30}[3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M}) - 2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K}],$$
$$a_3 = \tfrac{1}{6}[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M}]. \tag{3.23}$$

($a_1 = \tfrac{1}{15}[2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_2]$, $a_2 = \tfrac{1}{15}[3\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_1]$, $a_3 = \tfrac{1}{3}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_3$ (przyp.tłum.)

Użyte tu ślady tensora $\boldsymbol{A}$ wyrażają się następująco

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K} = A_{iikk}, \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = A_{ikik} = tr(\boldsymbol{A}), \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M} = A_{ikki}\,, \tag{3.24}$$

Z (3.11), (3.13) wynika postać $\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}$.

Dla tensorów $\boldsymbol{A}$, które spełniają dodatkowe warunki symetrii,

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}\,, \tag{3.25}$$

(na przykład tensor własności sprężystych ciał hipersprężystych), obowiązuje związek $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M}$ $(\Rightarrow a_3 = 0,\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_2 -$ przyp. tum.), tak więc

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{A} - a_1\boldsymbol{I}_1 - a_2\boldsymbol{I}_2, \tag{3.26}$$

gdzie

$$a_1 = \tfrac{1}{15}[2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}]^{\,2}, \quad a_2 = \tfrac{1}{15}[3\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K}]\,. \tag{3.27}$$

Odpowiada to wynikom otrzymanym w pracy [5].

[2] Przyp. tłum. Skorygowano niepoprawny współczynnik w oryginalnym wzorze $a_1 = \tfrac{1}{15}[4\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}]$.

4. Wielkość (norma) $\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}$ może być wykorzystana jako naturalny wskaźnik anizotropii. To jest bardzo prosta, lecz jednak nieco zgrubna charakterystyka. Bardziej precyzyjną charakterystykę można uzyskać z rozważenia orbity tensora.

Orbitę tensora $\boldsymbol{A} \in T_p$ względem grupy obrotów $\mathcal{R}$ wyznaczamy, podobnie jak w teorii grup transformacyjnych, jako zbiór wszystkich tensorów, które mogą powstać na skutek obrotu $\boldsymbol{A}$, tj. zbiór,

$$\boldsymbol{A}/\mathcal{R} \equiv \{\boldsymbol{R} * \boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}\}. \tag{4.1}$$

Szczegółowy opis zbioru orbity w T_p można znaleźć w pracy [8]. Podsumowujemy tutaj najważniejsze *własności geometryczne orbit tensorowych*:

1) Dowolne dwie orbity $\boldsymbol{A}/\mathcal{R}$, $\boldsymbol{B}/\mathcal{R}$ są *równoodległe*, tj. dla dowolnego $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}/\mathcal{R}$, $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{B}/\mathcal{R}$ obowiązuje

$$\min_{\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{B}/\mathcal{R}} \rho(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) = \min_{\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}/\mathcal{R}} \rho(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}). \tag{4.2}$$

2) Dowolna orbita $\boldsymbol{A}/\mathcal{R}$ jest *stałośrednicowa*, tj. dla dowolnego punktu $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}/\mathcal{R}$ obowiązuje

$$\max_{\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}/\mathcal{R}} \rho(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) = const. \tag{4.3}$$

3) Orbita $\boldsymbol{A}/\mathcal{R}$ leży na kuli, której środkiem jest izotropowa część tensora $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$, zaś jej promień jest równy $|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|$.

Ś*rednica orbity* zdefiniowana jest następująco

$$d(\boldsymbol{A}) \equiv \max_{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{A}/\mathcal{R}} \rho(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}). \tag{4.4}$$

Własność stałości średnicy orbit prowadzi w konsekwencji do wygodnego wzoru

$$d(\boldsymbol{A}) \equiv \max_{\boldsymbol{R} \in \mathcal{R}} \rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}). \tag{4.5}$$

Należy zwrócić uwagę na następująca kwestię: *Średnica orbity tensora* $\boldsymbol{A}$ *nie zależy od jego części izotropowej* $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$. W rzeczywistości odległość $\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A})$ nie zależy od $\boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}$:

$$\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}| = \rho(\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}, \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}), \tag{4.6}$$

Udowadniamy następującą ważną W ł a s n o ś ć: *Średnica orbity* $d(\boldsymbol{A})$ *tensora* $\boldsymbol{A}$ *jest stała*. Rzeczywiście, weźmy dwa dowolne tensory $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. Przez $S(\boldsymbol{X}, a)$ oznaczamy domkniętą Kulę ze środkiem w $\boldsymbol{X}$ i promieniem a. Wprowadzamy odległość między orbitami następująco:

$$r(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}, \boldsymbol{B}/\mathcal{R}) \equiv \min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}/\mathcal{R}, \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{B}/\mathcal{R}} \rho(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}). \tag{4.7}$$

Rozważamy następujące „pogrubienie” orbity $\boldsymbol{A}/\mathcal{R}$

$$< \boldsymbol{A}/\mathcal{R} > \equiv \bigcup_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}/\mathcal{R}} S(\boldsymbol{X}, r(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}, \boldsymbol{B}/\mathcal{R})). \tag{4.8}$$

Ponieważ orbity $\boldsymbol{A}/\mathcal{R}$, $\boldsymbol{B}/\mathcal{R}$ są równoodległe zgodnie z (4.2), to cała orbita $\boldsymbol{B}/\mathcal{R}$ jest zawarta w $< \boldsymbol{A}/\mathcal{R} >$ (a ściślej: leży na powierzchni tego obszaru). Wynika z tego

$$d(\boldsymbol{A}) - d(\boldsymbol{B}) \le 2r(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}, \boldsymbol{B}/\mathcal{R}) . \tag{4.9}$$

Poprzez zamianę miejsc tensorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ w tj dyskusji otrzymujemy

$$| d(\boldsymbol{A}) - d(\boldsymbol{B}) | \le 2r(\boldsymbol{A}/\mathcal{R}, \boldsymbol{B}/\mathcal{R}) \le 2\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) , \tag{4.10}$$

i w konsekwencji

$$\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \to 0 \quad \Rightarrow \quad d(\boldsymbol{A}) \to d(\boldsymbol{B}) , \tag{4.11}$$

co było do okazania.

Wzór (4.5) można teraz zapisać w następujący sposób

$$d(\boldsymbol{A}) = 2 | \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} | \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sin \Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}) , \tag{4.12}$$

gdzie

$$\Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}) \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{arccos} \frac{\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} \cdot (\boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}})}{\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}} , \tag{4.13}$$

5. Otrzymaliśmy dwie niezmiennicze, geometryczne charakterystyki zmienniczości tensora na skutek obrotów:

– Odległość tensora $\boldsymbol{A}$ do najbliższego tensora izotropowego

$$| \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} | = \rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}}) , \tag{5.1}$$

która jest równa promieniowi najmniejszej kuli zawierającej całą orbitę $\boldsymbol{A}/\mathcal{R}$;

– średnicę jego orbity $\boldsymbol{A}/\mathcal{R}$

$$d(\boldsymbol{A}) = d(\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}) . \tag{5.2}$$

Jako wstępne *niezmiennicze oszacowania anizotropii* dowolnego tensora $\boldsymbol{A} \in T_p$ wskazujemy:

— normę części anizotropowej $\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}$ tensora $\boldsymbol{A}$

$$\lambda(\boldsymbol{A}) \equiv \frac{| \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} |}{| \boldsymbol{A} |} = \frac{| \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} |}{(| \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} |^2 + | \boldsymbol{A}^{\mathcal{J}} |^2)^{1/2}} ; \tag{5.3}$$

— stosunek średnicy orbity $d(\boldsymbol{A})$ do średnicy najmniejszej kuli zawierającej tę orbitę

$$\vartheta(\boldsymbol{A}) \equiv \frac{d(\boldsymbol{A})}{2 | \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} |} = \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sin \Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}})\ ^{3} . \tag{5.4}$$

Oba niezmienniki są *ciągłe*.

Oczywiście jest

$$0 \le \lambda(\boldsymbol{A}) \le 1 , \tag{5.5}$$

przy czym dolna granica jest osiągana dla przestrzeni tensorów izotropowych $\mathcal{J}_p$, zaś górna

[3] Przyp. tłum. Skorygowano występujący w oryginale niepoprawny wzór $\vartheta(\boldsymbol{A}) \equiv d(\boldsymbol{A}) / (2 | \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} |) = \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \cos \Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}})$. Niepoprawność tego wzoru można wykazać rozpatrując np. przypadek czystego ścinania $\boldsymbol{\tau}^{ps}$, kiedy to $-\boldsymbol{\tau}^{ps} = \boldsymbol{R} * \boldsymbol{\tau}^{ps}$ należy do orbity $\boldsymbol{\tau}^{ps}$, $\max(\Theta) = 90^0$ i wartość $\vartheta(\boldsymbol{A})$, cf. (4.12), winna być równa 1. Stosując ww. oryginalny wzór otrzymuje się niepoprawną wartość $\vartheta(\boldsymbol{A}) = \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \cos \Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}) = \cos(\Theta = 90^0) = 0$.

granica na jej ortogonalnym dopełnieniu $\mathcal{A}_p$. Oszacowanie $\lambda(\boldsymbol{A})$ zostało zastosowane w pracy [5] do tensora przenikalności dielektrycznej $(p=2)$ i tensora własności sprężystych $(p=4)$.

W odniesieniu do drugiego oszacowania dla dowolnego tensora $\boldsymbol{A}\in T_p$ obowiązuje

$$0 \le a(p) \le \vartheta(\boldsymbol{A}) \le 1, \tag{5.6}$$

gdzie $a(p)$ jest funkcją rzeczywistą argumentów całkowitych. Mamy

$$a(1)=1, \quad a(2)=\sqrt{3}/2, \dots, \tag{5.7}$$

Pierwsza wartość jest oczywista, ponieważ dla $p=1$ jedynym tensorem izotropowym jest tensor 0, zatem $\boldsymbol{a}^{\mathcal{A}}=\boldsymbol{a}$ i $\vartheta(\boldsymbol{a})=1$ dla wszystkich $\boldsymbol{a}$. Drugą wartość wyznaczono w pracy [9].

6. Oczywiście można stosować różne kombinacje oszacowań λ, ϑ. My proponujemy następujące

$$\delta(\boldsymbol{A}) \equiv \lambda(\boldsymbol{A})\vartheta(\boldsymbol{A}) = d(\boldsymbol{A})/(2\,|\boldsymbol{A}|). \tag{6.1}$$

Oszacowanie $\delta(\boldsymbol{A})$ ma następującą interpretację geometryczną. Dla zbioru wszystkich promieni przechodzących przez orbitę tensora $\boldsymbol{A}$, tj. zbioru

$$K(\boldsymbol{A}) \equiv \{\boldsymbol{X}\in T_p \mid \ \boldsymbol{X} = x\,\boldsymbol{R} * \boldsymbol{A} \text{ dla jakiegoś } x>0 \text{ i jakiegoś } \boldsymbol{R}\in\mathcal{R}\ \} \tag{6.2}$$

wprowadzamy pojęcie *stożka orbitalnego* tensora $\boldsymbol{A}$.
Wartość $\delta(\boldsymbol{A})$ wskazuje rozwarcie tego stożka.

Oczywiście jest

$$0 \le \delta(\boldsymbol{A}) \le 1. \tag{6.3}$$

Pokażemy, że górna granica w (6.3) jest faktycznie osiągalna. Dla $p=2$ bierzemy czyste ścinanie, tj. tensor typu,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega} = k(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{m}), \quad \boldsymbol{mn}=0.. \tag{6.4}$$

Poprzez zastosowanie do $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ obrotu $\boldsymbol{R}$ o kąt $\pi/2$ wokół osi pionowej $\boldsymbol{l}$ otrzymujemy $\boldsymbol{Rm}=\boldsymbol{n}, \boldsymbol{Rn}=-\boldsymbol{m}$ i zgodnie z równaniem (2.3) $\boldsymbol{R}*\boldsymbol{\omega}=-\boldsymbol{\omega}$. Dla $p=2n$ bierzemy

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}, \tag{6.5}$$

zaś dla $p=2n+1$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}. \tag{6.6}$$

Wszystkie te tensory poddane obrotowi $\boldsymbol{R}$, przeprowadzane są w $\boldsymbol{R}*\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$. Z równań (6.1), (4.5) otrzymujemy $\delta(\boldsymbol{A})=1$.

7. Na koniec należy zauważyć, że niezmienniki λ, ϑ są najprostszymi charakterystykami geometrycznymi orbity. Inne jej charakterystyki geometryczne można zaproponować w postaci 3-wymiarowej rozmaitości w 3^p-wymiarowej przestrzeni T_p. Wymaga to jednak zupełnie innego podejścia, na przykład takiego jak w [10].

8. *Dodatek.* Lista niezbędnych i wystarczających korelacji do przełożenia wzorów występujących w tej pracy z zapisu absolutnego do klasycznego zapisu indeksowego:

$\boldsymbol{n}, \omega, \boldsymbol{A}$	$\leftrightarrow$	$n_i, \omega_{ij}, A_{i\dots j},$	$\mathbf{1}, \boldsymbol{E}$	$\leftrightarrow$	$\delta_{ij}, \varepsilon_{ijk},$
$\boldsymbol{R}$	$\leftrightarrow$	$R_{ij},$	$\boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}$	$\leftrightarrow$	$R_{ia}R_{jb}\dots R_{kc}A_{ab\dots c},$
$\boldsymbol{Ra}$	$\leftrightarrow$	$R_{ij}a_j,$	$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2$	$\leftrightarrow$	$R_{(1)\,ij}R_{(2)\,jk},$
$\boldsymbol{ab}$	$\leftrightarrow$	$a_ib_i,$	$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{h}$	$\leftrightarrow$	$a_ib_j\dots h_k,$
$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$	$\leftrightarrow$	$A_{i\dots j}B_{i\dots j},$	$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	$\leftrightarrow$	$A_{i\dots j}B_{a\dots b},$

$\sigma^* \times \boldsymbol{A} \quad \leftrightarrow \quad A_{ijkl} \to A_{ikjl}, \quad \sigma^* = <1,3,2,4> \equiv <2,3>$ (przyp. tłum.).

Literatura

1. VOIGT, W., Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig, Verlag Teubner 1928.
2. WOOSTER, W. A., Tensors and Group Theory for the Physical Properties of Crystals, Clarendon Press, Oxford 1973.
3. NYE, J. F., Physical Properties of Crystals, Clarendon Press, Oxford 1957.
4. СИРОТИН, Ю. И.; Шаскольская, М. П., Основы кристаллофизики, М.; Наука 1979.
5. ФЕДОРОВ, Ф. И., Теория упругих волн в кристаллах, М.: Наука 1965.
6. RACAH, G., Determinazione del numero dei tensori isotropi indinedenti di rango *n,* Rendiconti Mat. **386** (1933).
7. ГУРЕВИЧ Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, Москва-Ленинград, ОГИЗ 1948.
8. РЫХЛЕВСКИЙ, Я., Об орбитах в пространствах эвклидовых тензоров, Alkalmazott Matematical Lapok, 1984 (in print).
9 RYCHLEWSKI J., On evaluation of anisotropy of properties described by symmetric second-order tensors, Czechoslovak Journal of Physics, v. B **34**, 1984, 499-506.
10. RYCHLEWSKI, J., The general form of isotropic transformation of tensor space, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. Techn., **18** (1970) 7, 283.

Otrzymano: 2 lutego 1984 r.

Adres: Institute of Fundamental Technological Research, Świętokrzyska 21, Warsaw, Poland, Prof. Dr. Jan RYCHLEWSKI

Uwaga tłumacza: Wzór (4.12) można wyprowadzić następująco:

$$d(\boldsymbol{A}) \overset{(4.5-4.6)}{=} \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}| = \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} |\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} - \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}| = \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sqrt{(\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} - \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}})\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} - \boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}})} =$$

$$= \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sqrt{|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2 + |\boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2 - 2(\boldsymbol{R} * \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}})} \overset{(2.7)}{=} \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sqrt{(2|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2 - 2|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2 \cos(2\Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}))} =$$

$$= \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sqrt{2|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2 (1 - \cos 2\Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}))} = \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sqrt{2|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2 (\cos^2\Theta + \sin^2\Theta - (\cos^2\Theta - \sin^2\Theta))} =$$

$$= \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sqrt{4|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}|^2 \sin^2\Theta} = 2|\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}| \max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}} \sin\Theta(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{\mathcal{A}}); \quad \Theta \in <0^0, 90^0>, \quad \textit{cbdo}$$