

## Memo

AERO\_M\_TSFCundPSFC\_17-07-15.pdf

**Date:** 2017-07-15

**From:**

Prof. Dr. Dieter Scholz, MSME  
Aircraft Design and Systems Group (AERO)  
Department Automotive and Aeronautical Engineering  
Hamburg University of Applied Sciences Hamburg  
Berliner Tor 9, 20099 Hamburg, Germany

Phone: +49 - 40 - 42875 - 8825

E-Mail: [info@ProfScholz.de](mailto:info@ProfScholz.de)

WWW: <http://AERO.ProfScholz.de> <http://reports-at-aero.profscholz.de>

---

# Der spezifische Kraftstoffverbrauch von Flugtriebwerken (TSFC und PSFC)

## 1 Einleitung

- Es ist  $c = c_T = \text{TSFC}$  der schubspezifischen Kraftstoffverbrauch, der für Jets genutzt wird.
- Es ist  $c' = c_P = \text{PSFC}$  der leistungsspezifischen Kraftstoffverbrauch, der für Propellerflugzeuge genutzt wird.
- Der Kraftstoffmassenstrom von Jets ist  $\dot{m}_F = c T$  .
- Der Kraftstoffmassenstrom von Propellerflugzeugen ist  $\dot{m}_F = c' P$  .
- Die Leistung (power) ist  $P = T V = D V$  .

Darin ist

$T$  der Schub (thrust),

$D$  der Widerstand (drag) und

$V$  die Geschwindigkeit.

Zu dieser Memo gibt es eine Excel-Tabelle "SFC\_Herrmann.xls":

<http://fml.ProfScholz.de> => Material zur Vorlesung

## 2 Die Charakteristik des schubspezifischen Kraftstoffverbrauchs $c = c_T$

Die Charakteristik folgt aus der Herleitung eines fiktiven übergeordnete Wirkungsgrads  $\eta$  des Jets (nicht zu verwechseln mit dem Propellerwirkungsgrad,  $\eta_P$ ).

Kraftstoff massenstrom:  $\dot{m}_F = c_T \cdot T$   
 schubspezifischer Kraftstoffverbrauch  $\xrightarrow{\quad}$   $\uparrow$  Schub

Energiegehalt des Kraftstoffs, Heizwert,  $H$ :

$$H = \frac{E}{m} \quad \text{Energie pro Masse}$$

$$\dot{E} = P$$

$$\dot{m}_F \cdot H \cdot \eta = P = T \cdot V = \mathcal{D} \cdot V$$

$$c_T \cdot T \cdot H \cdot \eta = T \cdot V$$

$$c_T \cdot H \cdot \eta = V$$

$$\eta = \frac{V}{c_T \cdot H}$$

Kerosin:  $H = 42,5 \text{ MJ/kg}$

Der schubspezifische Kraftstoffverbrauch

$$c = c_T = \frac{V}{\eta H}$$

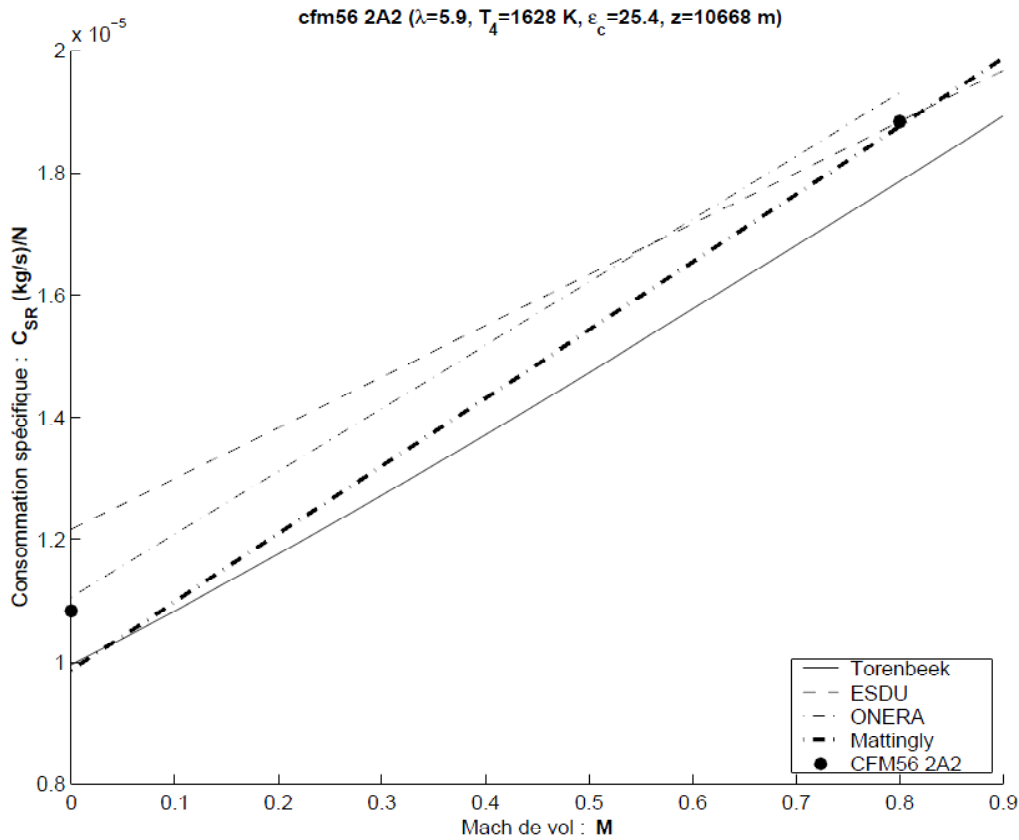
**steigt** vom Prinzip her **proportional mit der Fluggeschwindigkeit**.

Der Ansatz aus der Theorie für den schubspezifischen Kraftstoffverbrauch lautet also

$$c = c_a V \quad (1)$$

Ein Strahltriebwerk produziert bei Standschub (Geschwindigkeit ist null) im physikalischen Sinne keine Leistung. Trotzdem wird Kraftstoff verbraucht (wie im Bild 1 für das Triebwerk CFM56 gezeigt). Der Ansatz aus der Praxis muss also lauten

$$c = c_a V + c_b \quad (2)$$



**Bild 1:** Vergleich von Modellen zur Berechnung des schubspezifischen Kraftstoffverbrauchs.

$$\text{mit } V = a M = a_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} M = a_0 \sqrt{\theta} M$$

ergibt sich die Abhängigkeit des schubspezifischen Kraftstoffverbrauchs von der Machzahl durch

$$c = c_a a_0 \sqrt{\theta} M + c_b \quad (3)$$

Die Höhenabhängigkeit des schubspezifischen Kraftstoffverbrauchs  $c$  scheint sich also erst dann zu ergeben, wenn man  $c$  über die Machzahl berechnen will statt dies mit der Geschwindigkeit zu tun, wie es sich aus der ursprünglichen Herleitung mit (1) und (2) ergibt. Bei genauer Betrachtung der Thermodynamik des Verbrennungsprozesses stellt man dann auch fest, dass sich der schubspezifischen Kraftstoffverbrauchs mit der Höhe verringert, weil dort in der kälteren Luft der Turbinenwirkungsgrad höher ist. Dies zeigt auch (3).

Eine gute Studie (siehe Anhang A) ist

Élodie Roux: Modèles Moteurs... Réacteurs double flux civils...

darin wird die Gleichung zum schubspezifischen Kraftstoffverbrauch nach Jack Mattingly mit SI-Einheiten aufbereitet ...

*Jack Mattingly*

Puisque nous nous intéressons essentiellement aux réacteurs ayant un grand taux de dilution  $\lambda$ , nous retiendrons le modèle correspondant au "High-bypass-ratio turbofan" qui exprimé en unités du système international devient :

$$C_{SR} = (1.13 \cdot 10^{-5} + 1.25 \cdot 10^{-5} M) \sqrt{\theta}$$

$C_{SR}$  : Consommation Spécifique Réacteur (kg/s)/N  
 $M$  : Mach de vol  
 $\theta$  : Rapport des températures en vol et au sol  $\theta = \frac{T}{T_0}$   
 $T$  : Température ambiante en vol K  
 $T_0$  : Température au sol  $T_0 = 288.15K = 15^\circ C$  K

... und gem. Élodie Roux korrigiert mit einem Faktor 0,92:

$$c = (1,04 \cdot 10^{-5} + 1,15 \cdot 10^{-5} M) \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \frac{\text{kg}}{\text{Ns}}$$

In

$$c = c_a a_0 \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} M + c_b$$

ist damit

$$c_a = 0,92 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(Ns)} / 340,294 \text{ m/s} = 3,38 \cdot 10^{-8} \text{ kg/(Nm)}$$

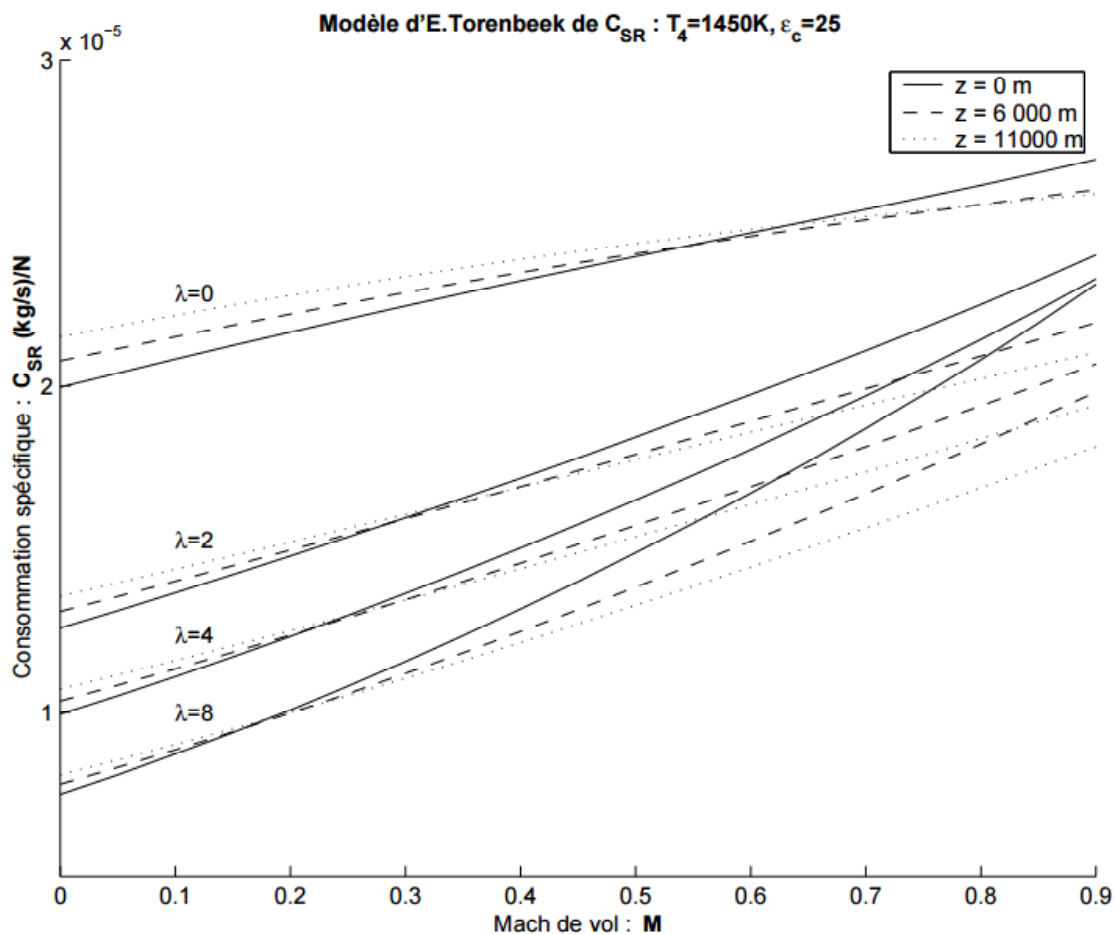
$$c_b = 0,92 \cdot 1,13 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \text{ kg/(Ns)} = 1,04 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \text{ kg/(Ns)}$$

also noch einmal kurz:

$$c_a = 3,38 \cdot 10^{-8} \text{ kg/(Nm)} \quad c_b = 1,04 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \text{ kg/(Ns)}$$

Für  $c_b$  ergibt sich nach Mattingly eine Höhenabhängigkeit, die so zunächst nicht erwartet wurde. Das bedeutet, dass mit  $c_b$  der Verbrauch im Standschub mit der Höhe abnimmt. Damit wird die gesamte Gerade abgesenkt. Dies scheint durch das kompliziertere Modell von Torenbeek bestätigt zu werden – jedenfalls für höhere Machzahlen und Nebenstromverhältnisse (nicht jedoch für ganz niedrige Machzahlen, wie zunächst aus der Gleichung zu erwarten gewesen wäre). Siehe dazu Bild 2.

**Anhang A** enthält weitere Herleitungen und eine Systematik zu den Gleichungen von Roux und Mattingly.

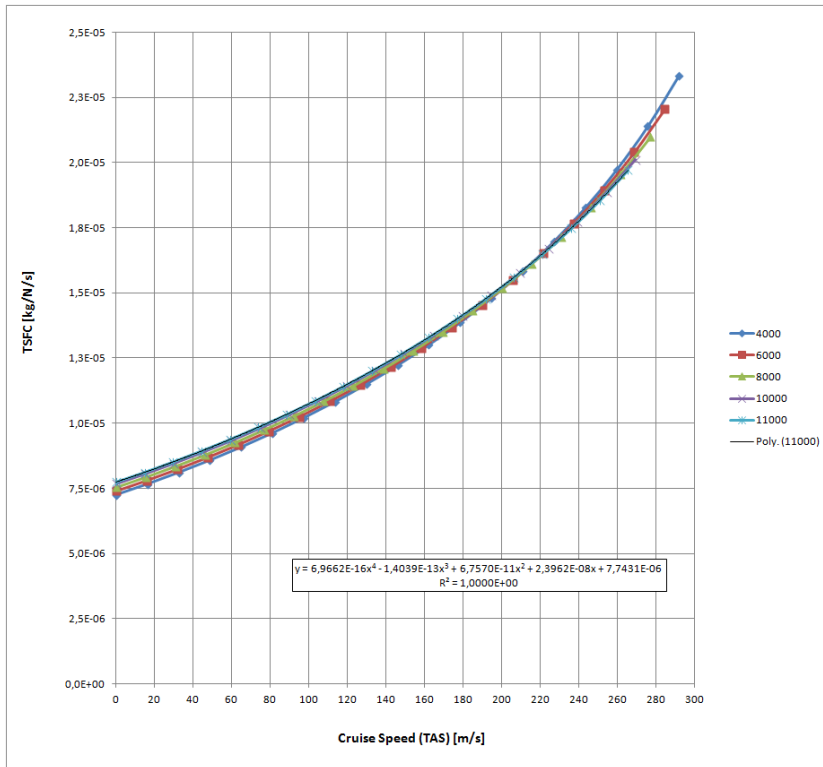


**Bild 2:** Der schubspezifische Kraftstoffverbrauch als Funktion von Machzahl  $M$ , Nebenstromverhältnis  $\lambda$  und Flughöhe  $z$ .

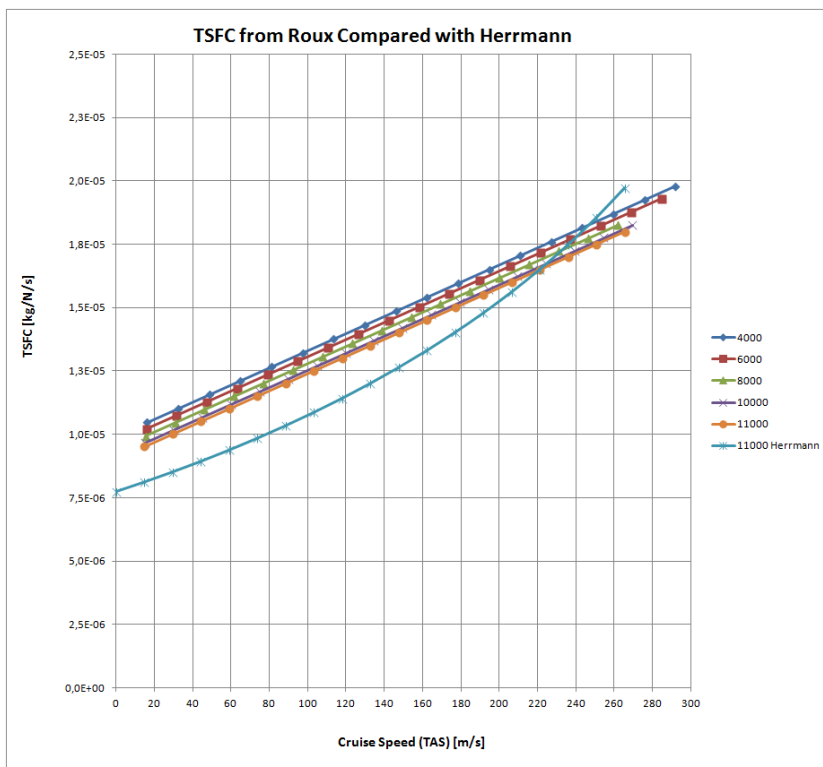
Das Modell von Herrmann (nach Torenbeek) ist in **Anhang B** beschrieben. Den Vergleich zwischen Herrmann und dem linearen Modell nach (2) und (3) zeigen Bild 3 und Bild 4.

Zum Herrmann Modell gibt es eine Excel-Tabelle:

<http://FML.ProfScholz.de> => Material zur Vorlesung



**Bild 3:** TSFC = c nach Herrmann für verschiedene Flughöhen, BPR = 6 und  $T_{TO} = 100$  kN. TSFC steigt fast linear mit Reisefluggeschwindigkeit und ist nur wenig abhängig von der Höhe.



**Bild 4:** TSFC = c nach Herrmann für eine Flughöhe von 11 km, BPR = 6 und  $T_{TO} = 100$  kN. Vergleich mit dem linearen Modell (Roux). Die Höhenabhängigkeit ist hier nicht unbedingt erforderlich (siehe Bild 3). Das lineare Modell ist durchaus geeignet, insbesondere, wenn  $c_a$  und  $c_b$  nicht pauschal angesetzt werden, sondern je nach Triebwerk vorliegen (BADA, Anhang C).

### 3 Die Charakteristik des leistungsspezifischen Kraftstoffverbrauchs $c' = c_p$

Die Charakteristik folgt wieder aus der Herleitung des fiktiven übergeordnete Wirkungsgrad des Propellerflugzeugs (nicht zu verwechseln mit dem Wirkungsgrad des Propellers  $\eta_P$ ).

Kraftstoffmassenstrom:  $\dot{m}_F = c_p \cdot P$   
 $P = D \cdot v$   $P = \dot{m}_F \cdot H \cdot \eta$

~~$P = c_p \cdot P \cdot H \cdot \eta$~~   $\eta = \frac{1}{c_p \cdot H}$

Also:  $\eta = \frac{\text{output}}{\text{input}} = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}$

mit  $P_{\text{out}} = D \cdot v$  Flugleistung  
 $P_{\text{in}} = \dot{m}_F \cdot H$  Leistung im Kraftstoffmassenstrom

Der leistungsspezifische Kraftstoffverbrauch

$$c' = c_p = \frac{1}{\eta H}$$

ist vom Prinzip her und in gewissen Grenzen **konstant**.

### 4 Zusammenhang zwischen dem schubspezifischen und dem leistungsspezifischen Kraftstoffverbrauch

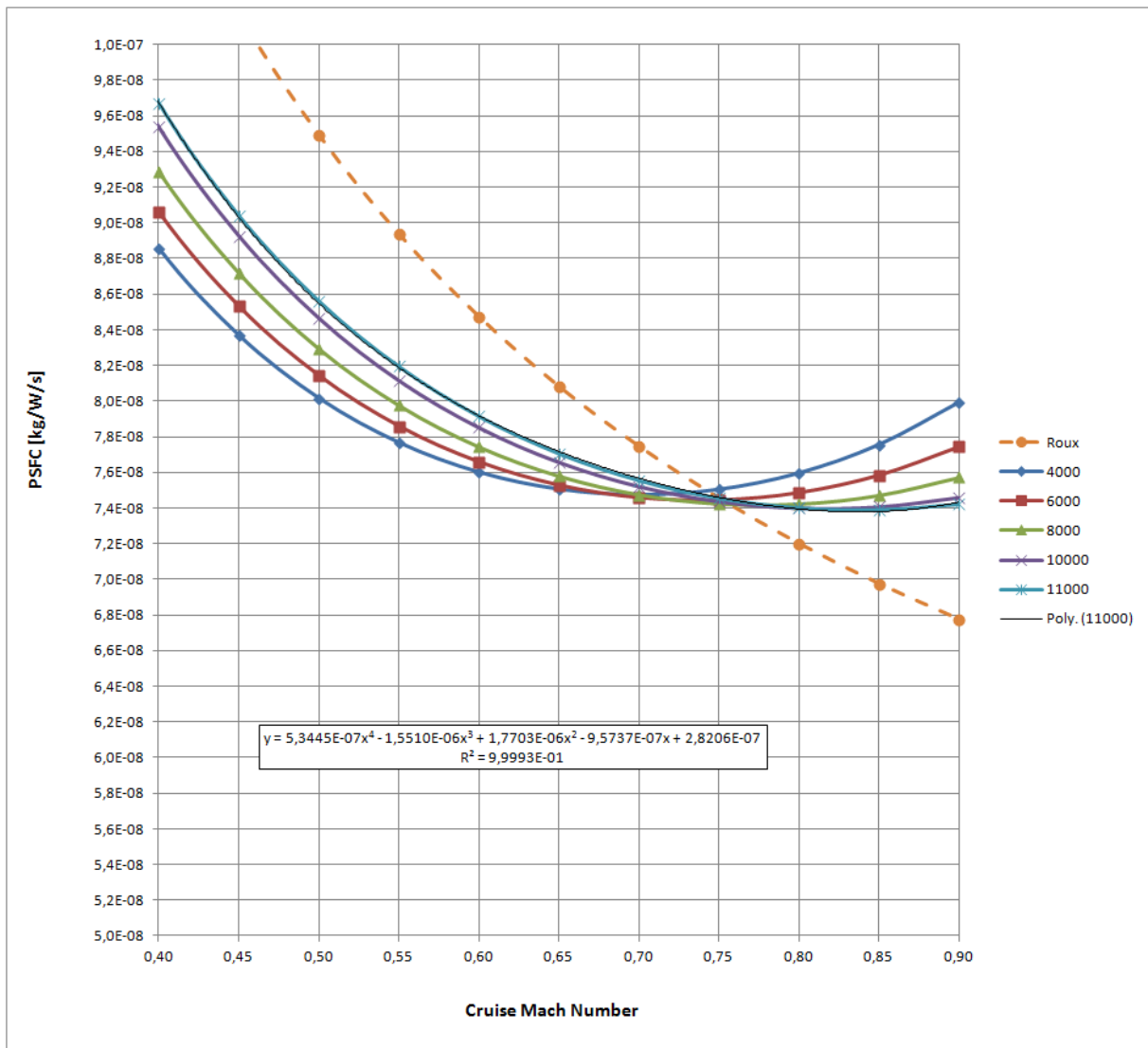
Es ist  $\dot{m}_F = c_p P = c_p T V = c T$ . Damit ist dann

$$c = c_p V \quad (4)$$

Wenn man das durchaus passende lineare Modell (2), (3) nimmt für TSFC, so liefert dieser Ansatz übertragen mit (4) bzw. mit (siehe Anhang A)

$$c_p = \frac{c_{a,base}}{a_0} + \frac{c_{b,base}}{a_0} \frac{1}{M}$$

keine passende Näherung – wie Bild 5 zeigt. **Bessere wäre stattdessen für  $c_p$  einen konstanten Wert anzugeben.**



**Bild 5:**  $PSFC = c_p$  nach Herrmann für verschiedene Flughöhen, BPR = 6 und  $T_{TO} = 100$  kN. PSFC ist nahezu konstant bei Reiseflugmachzahl. Dies wird jedoch durch  $c_p = c/V$  basierend auf der linearen Beschreibung von  $TSFC = c$  nicht erreicht.



## 5 Bedeutung des spezifischen Kraftstoffverbrauchs im Zusammenhang mit der Breguet'schen Reichweitengleichung

Die Breguet'sche Reichweitengleichung für Jets kann in dieser Form geschrieben werden

$$R = \frac{E V}{c g} \ln \frac{m_{MTO}}{m_L} . \quad (5)$$

Bei der Herleitung wurde angenommen, dass die Gleitzahl  $E$ , Geschwindigkeit  $V$  und schubspezifischer Kraftstoffverbrauch  $c$  konstant sind während sich die Masse des Flugzeugs ändert. Das ist korrekt, weil durch eine nur langsam steigende Flughöhe der Auftriebsbeiwert konstant gehalten wird. Bei konstanter Geschwindigkeit  $V$  ist dann auch  $c$  konstant.

Es fällt auf, dass (5) nach (4) – eher unüblich – auch hätte geschrieben werden können als

$$R = \frac{E}{c_P g} \ln \frac{m_{MTO}}{m_L} . \quad (6)$$

Dies ist die Form der Breguet'sche Reichweitengleichung, die man ansonsten für Propellerflugzeuge kennt.

Wir schreiben  $E$  als  $L/D = W/D$

$$R = \frac{W V}{D c g} \ln \frac{m_{MTO}}{m_L} . \quad (5a)$$

$$R = \frac{W}{D c_P g} \ln \frac{m_{MTO}}{m_L} . \quad (6a)$$

Der Widerstand  $D$  ist abhängig von der Geschwindigkeit  $V$ . Nach Vorlesung Flugmechanik schreiben wir für  $D = A V^2 + B V^{-2}$ .

In (6a) nehmen wir an, dass  $c_P$  nicht von der Geschwindigkeit abhängt also konstant ist. Es muss jetzt  $D$  ein Minimum werden. Das ist der Fall bei einer Geschwindigkeit  $V_{md}$ .

Anders in (5a), hier nehmen wir an, dass  $c$  nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Es muss  $D/V$  ein Minimum werden. Das ist der Fall bei einer Geschwindigkeit  $V = 3^{(1/4)} \cdot V_{md} = 1,316 V_{md}$ .

Die Analyse des spezifischen Kraftstoffverbrauchs zeigt, dass  $c_P$  näherungsweise im Reiseflug als konstant angenommen werden kann (Bild 5). Das gilt für  $c$  ganz sicher nicht. Die Herleitung einer optimalen Fluggeschwindigkeit für maximale Reichweite bzw.

minimalen Kraftstoffverbrauch muss also neu überdacht werden gegenüber der "klassischen" Betrachtung in der Lehre (Bild 6).

• Optimale Geschw. für die Reichweite des Jet  
 $\frac{D}{v}$  muß minimal werden:  $D = A \cdot v^2 + B \cdot v^{-2}$   
 $\frac{D}{v} = A \cdot v + B \cdot v^{-3}$   
 $\frac{d}{dv} \left( \frac{D}{v} \right) = A - 3Bv^{-4} \stackrel{!}{=} 0$       $A = 3Bv^{-4}$       $v^{-4} = \frac{A}{3B}$   
 $v^4 = \frac{3B}{A}$       $v = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{A}}$      mit  $v_{md} = \sqrt[4]{\frac{B}{A}}$   
 $v = v_{opt} = \sqrt[4]{3} \cdot v_{md}$   
 $v_{opt} = 1,316 \cdot v_{md}$      Jet range

**Bild 6:** Die "klassische" Herleitung zur optimalen Geschwindigkeit des Jets muss überdacht werden!

Aus dem Flugzeugentwurf ist bereits bekannt, dass die optimale Reisefluggeschwindigkeit  $V$  irgendwo zwischen  $V_{md}$  und  $1,31 \cdot V_{md}$  liegt. Eine Erklärung dafür liegt allein schon in der Betrachtung zum spezifischen Kraftstoffverbrauch, ohne dass andere Erklärungen (Flügelmasse, ...) dazu erforderlich wären.

## 6 Zusammenfassung

Aus einer grundsätzlichen Betrachtung zum Wirkungsgrad ( $\eta = P_{out}/P_{in}$ ) folgt bereits, dass der leistungsspezifische Kraftstoffverbrauch  $c_P$  annähernd konstant sein müsste, während für den schubspezifische Kraftstoffverbrauch  $c$  im ersten Ansatz gilt  $c = c_P V$ . Da auch bei Standschub ( $V = 0$ ) Kraftstoff verbraucht wird, gilt der erweiterte Ansatz  $c = c_a + c_b V$ .

Die Breguet'sche Reichweitengleichung kann durchaus mit einem konstanten schubspezifische Kraftstoffverbrauch  $c$  (ermittelt für eine bestimmte Reisefluggeschwindigkeit) beschrieben werden. Jedoch führt dies zu einem Fehler, wenn man in der Flugleistungsrechnung damit eine optimalen Flugeschwindigkeit ist berechnen will. Es wird empfohlen (für eine einfache Betrachtung) die Breguet'sche Reichweitengleichung für Jets mit einem konstanten leistungsspezifische Kraftstoffverbrauch  $c_P$  zu schreiben. Dies führt dann auf eine optimale Reisefluggeschwindigkeit bei minimalem Widerstand (minimum drag,  $md$ ) von  $V_{md}$  statt auf  $1,316 \cdot V_{md}$  wie bei der "klassischen" Herleitung. Eine detailliertere Betrachtung sollte das Modell nach Herrmann nutzen (Anhang B).

## Anhang A Herleitung von Gleichungen zu TSFC und PSFC nach Roux

### TSFC

Mattingly korrigiert von Roux 2002 (siehe unten das Titelblatt des Dokumentes mit Link):

$$c = (1,04 \cdot 10^{-5} + 1,15 \cdot 10^{-5} M) \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \frac{\text{kg}}{\text{Ns}}$$

$$c_{a,\text{base}} = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{kg/(Ns)}$$

$$c_{b,\text{base}} = 1,04 \cdot 10^{-5} \text{kg/(Ns)}$$

$$c = \frac{c_{a,\text{base}}}{a_0} a_0 \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} M + c_{b,\text{base}} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}}$$

$$V = a M = a_0 \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} M$$

$$c_a = \frac{c_{a,\text{base}}}{a_0}, \quad a_0 = 340,294 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad c_a = 3,38 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{Nm}}$$

$$c_b = c_{b,\text{base}} \sqrt{\frac{T_0}{T(h)}}$$

$$c = c_{a,\text{base}} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} M + c_{b,\text{base}} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}}$$

$$c = c_a V + c_b$$

### PSFC

$$c_P = \frac{c}{V}$$

$$c_P = c_a + c_{b,\text{base}} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \cdot \frac{1}{V}$$

$$c_P = c_a + c_{b,\text{base}} \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \frac{1}{a_0 \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} M}$$

$$c_P = \frac{c_{a,\text{base}}}{a_0} + \frac{c_{b,\text{base}}}{a_0} \frac{1}{M}$$



## MODÈLES MOTEUR ...

Réacteurs double flux civils  
et réacteurs militaires à faible taux de dilution avec PC



FIG. 1 – Réacteur d'un A320-211. Photo : Manfred Biel

**Thèse :** Pour une approche analytique de la Dynamique du Vol.

**Volume :** 1

**Directeur de thèse :** Jean-Luc Boiffier.

**Doctorante :** Élodie Roux.

**Date :** 2002

<http://elodieroux.com/ReportFiles/ModelesMoteurVersionPublique.pdf>

## Anhang B Gleichungen zu TSFC nach Herrmann

$$SFC = \frac{0.697 \sqrt{\frac{T(h)}{T_0}} \left( \phi - \vartheta - \frac{\chi}{\eta_{comp}} \right)}{\sqrt{5 \eta_{noz} (1 + \eta_{fan} \eta_{turb} BPR) \cdot \left( G + 0.2 M^2 BPR \frac{\eta_{comp}}{\eta_{fan} \cdot \eta_{turb}} \right) - M (1 + BPR)}}$$

$$G = \left( \phi - \frac{\chi}{\eta_{comp}} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1.01}{\eta_{gasgen}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot (\chi + \vartheta) \cdot \left( 1 - \frac{\chi}{\phi \cdot \eta_{comp} \cdot \eta_{turb}} \right)} \right)$$

$$\vartheta = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2 ; \quad \phi = T_{TE} / T(h) ; \quad \chi = \vartheta \cdot \left( OAPR^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) ; \quad \eta_{gasgen} = 1 - \frac{0.7 M^2 (1 - \eta_{inlet})}{1 + 0.2 M^2}$$

$$\text{Turbine entry temperature in cruise: } T_{TE} = \frac{-8000 \text{ K} \cdot \text{kN}}{T_{TO}} + 1520 \text{ K}$$

$$OAPR = 2.668 \cdot 10^{-2} 1/\text{kN} \cdot T_{TO} + 3.517 \cdot BPR + 0.05566$$

$$\eta_{comp} = \frac{-2 \text{ kN}}{2 \text{ kN} + T_{TO}} - \frac{0.1171}{0.1171 + BPR} - M \cdot 0.0541 + 0.9407$$

$$\eta_{turb} = \frac{-3.403 \text{ kN}}{3.403 \text{ kN} + T_{TO}} + 1.048 - M \cdot 0.1553$$

$$\eta_{inlet} = 1 - (1.3 + 0.25 BPR) \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

$$\eta_{fan} = \frac{-5.978 \text{ kN}}{5.978 \text{ kN} + T_{TO}} - M \cdot 0.1479 - \frac{0.1335}{0.1335 + BPR} + 1.055$$

$$\eta_{noz} = \frac{-2.032 \text{ kN}}{2.032 \text{ kN} + T_{TO}} + 1.008 - M \cdot 0.009868$$

$T(h)$  is the temperature at altitude,  $T_0 = 288 \text{ K}$ ,  $T_{TO}$  is the take-off thrust of one engine and  $\Delta p/p \approx 0.02$  is the inlet pressure loss, the ratio of specific heats  $\gamma = 1.4$ . Efficiencies are only valid for  $T_{TO} > 80 \text{ kN}$ .

HERRMANN, Steffen: *Untersuchung des Einflusses der Motorenzahl auf die Wirtschaftlichkeit eines Verkehrsflugzeuges unter Berücksichtigung eines optimalen Bypassverhältnisses*. Berlin, Technical University, Institute for Aerospace Sciences, Department of Aircraft and Lightweight Design, Thesis, 2010

Das Herrmann Modell geht zurück auf Torenbeek. Herrmann hat die Methode auf Wirkungsgrade moderner Triebwerke angepasst. Er konnte dazu auf Industriedaten zugreifen.

## Anhang C SFC Berechnungen in BADA

Recht bekannt und viel eingesetzt ist:

EUROCONTROL: *User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA)*.

EEC Technical/Scientific Report No. 14/04/24-44, Revision 3.12. – URL:

[https://www.eurocontrol.int/sites/default/files/field\\_tabs/content/documents/sesar/user-manual-bada-3-12.pdf](https://www.eurocontrol.int/sites/default/files/field_tabs/content/documents/sesar/user-manual-bada-3-12.pdf)

Darin wird der spezifische Kraftstoffverbrauch in der gleichen Weise als lineares Modell angegeben wie nach Roux/Mattingly. Jedoch gibt es keine Höhenabhängigkeit des Parameters  $c_b$ .

"For jets the thrust specific fuel consumption,  $\eta$  [kg/(min·kN)], is specified as a function of the true airspeed,  $V_{TAS}$  [kt]:"

$$\text{jet:} \quad \eta = C_{f1} \times \left( 1 + \frac{V_{TAS}}{C_{f2}} \right)$$

$C_{f1}$  in kg/(min·kN),  $C_{f2}$  in knots.

"BADA Revision 3.12 provides operations and procedures data for a total of 438 aircraft types. For 166 of these aircraft types, data is provided directly in files. These aircraft types are referred to as being directly supported and referred to as aircraft original models." "For the other 272 aircraft types, the data is specified to be the same as one of the directly supported 166 aircraft types. These aircraft types have been identified as being 'equivalent' to original aircraft models. They are referred to as synonym aircraft."

Die Daten hier also  $C_{f1}$  und  $C_{f2}$  sind nur verfügbar für registrierte (zahlende) Nutzer.