

# **RIGIDEZ LATERAL EFECTIVA DE COLUMNAS CIRCULARES DE CONCRETO REFORZADO**

**Mario E. Rodríguez<sup>2</sup>**  
IIUNAM  
[mrod@unam.mx](mailto:mrod@unam.mx)

**José I. Restrepo<sup>1</sup>**  
UCSD  
jrestrepo@ucsd.edu

Abril 2024

---

<sup>1</sup> Investigador-Profesor Instituto de Ingeniería, UNAM

<sup>2</sup> Profesor Universidad de California, San Diego



## Resumen

En este estudio se propone un modelo en su mayor parte analítico, calibrado con resultados experimentales, para el cómputo de la rigidez lateral efectiva de columnas circulares de concreto reforzado. Se define la rigidez lateral efectiva como la rigidez secante cuando la sección crítica de la columna resiste  $2/3$  del momento probable resistente. Los resultados experimentales se obtuvieron como resultado de una revisión crítica de la literatura existente, con el fin de definir una base de datos de ensayos ante cargas laterales de columnas circulares de concreto reforzado. La base de datos seleccionada tiene resultados de ensayos de 22 columnas circulares.

Para la predicción de desplazamientos laterales de columnas circulares este estudio toma en cuenta fuentes de desplazamientos de cinco regiones en las que se divide a una columna circular. Para las regiones 2 y 3 de una columna, se proponen modelos nuevos que reemplazan a los modelos empleados para columnas circulares empleados por Restrepo y Rodríguez (2020), con el fin de considerar de manera rigurosa la naturaleza de las referidas fuentes de desplazamientos. Con esta predicción se define la rigidez efectiva de una columna de concreto reforzado. Empleando como población total al conjunto de ensayos considerados para columnas circulares, la media de la relación de valores de predicción de rigideces experimentales a las calculadas con el modelo propuesto en este estudio es igual a 1.03, respectivamente, y un coeficiente de variación igual 15.7%. Estos valores son menores que los encontrados por otros autores, empleando otros criterios.

*Palabras Clave:* Concreto reforzado, rigidez lateral, resultados experimentales, base de datos, modelo analítico.



## Abstract

This study presents an analytical model, calibrated with experimental results, for predicting the effective lateral stiffness of RC circular columns. This study defines effective lateral stiffness as the secant stiffness when the critical column section resists  $2/3$  of the probable moment strength. The experimental results were obtained from a column database defined after an extensive review of databases existing in the literature. The selected database includes twenty-two circular columns.

The proposed model for predicting yield displacement considers sources of lateral displacements from five regions considered in an RC column. In this study, new models for Regions 2 and 3 replace those of Restrepo and Rodriguez (2020), aimed at reaching a more comprehensive and rigorous prediction of the lateral displacements given by the five regions. The proposed effective lateral stiffness of an RC column uses results from this prediction of yield displacement. The ratio of measured effective lateral stiffness values for the column database to predicted effective lateral stiffness using the proposed model had a mean of 1.03, and the coefficient of variation of this ratio was equal to 15.7%. These results show that the proposed model provides an adequate estimate of column lateral stiffness with a smaller coefficient of variations than those found using existing models.

*Keywords:* Reinforced concrete, lateral stiffness, experimental results, database, analytical model.



# Índice

<b>Resumen</b> .....	iii
<b>Abstract</b> .....	v
<b>Índice</b> .....	vii
1. Introducción.....	1
2. Revisión de La Literatura y El Problema de La Definición de Rigidez Lateral Efectiva en Columnas Circulares de Concreto Reforzado .....	3
2.1 Propuesta para la Predicción de la Rigidez a Flexión Lateral Efectiva de Columnas .....	3
2.2 El Problema de la Definición de Rigidez Lateral Efectiva en una Columna de Concreto Reforzado.....	9
3. Base de Datos empleada en este Estudio.....	13
4. Definición de Rigidez Lateral en Columnas.....	23
5. Modelo Empleado para Obtener El Desplazamiento Lateral de Fluencia de Una Columna Circular de Concreto Reforzado Sometida a Acciones del Tipo Sísmicas .....	29
5.1 Fuentes de Desplazamiento Lateral .....	29
5.2 Región 1 (Restrepo y Rodriguez, 2020) .....	31
5.3 Región 2 .....	33
5.4 Región 3 .....	46
5.5 Región 4 (Restrepo y Rodriguez, 2020) .....	65
5.6 Región 5 .....	66
5.7 Desplazamiento de Fluencia de una Columna de Concreto Reforzado .....	68
6. Procedimiento de Optimización para Definir la Rigidez Lateral y Desplazamiento de Fluencia, y Resultados Obtenidos .....	70
7. Conclusiones.....	83
Referencias .....	85
Anexos .....	87
APENDICE A: PROCEDIMIENTO DE INTERPOLACIÓN DE DEFORMACIONES EN LA REGION 2.....	87

APENDICE B: EXPRESION PARA DEFINIR LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO Y PARA EL ANGULO $\theta_c$ EN LA REGION 2.....	89
APENDICE C: PROCEDIMIENTO PARA EL COMPUTO DE $\theta_f$ .....	93



# 1. Introducción

Una actividad relevante en el diseño sísmico de estructuras de concreto reforzado es la predicción de la rigidez lateral efectiva de columnas de concreto reforzado. Por ejemplo, en el proceso de análisis estructural, para diferentes valores de la rigidez lateral de los elementos estructurales, le corresponderían diferentes valores de desplazamientos laterales de la estructura. Así mismo, en el análisis sísmico de edificios o puentes de concreto reforzado, diferentes valores de la rigidez lateral de columnas, llevaría a obtener diferentes periodos fundamental de una estructura y por tanto diferentes demandas sísmicas en la estructura.

La base de datos de columnas de PEER (Berry et al., 2004) reúne datos importante de ensayos experimentales de columnas de concreto reforzado sometidas a cargas laterales cíclicas reversibles, Esta base de datos permite conocer, entre otras características, las rigideces laterales experimentales de columnas. Una comparativa de sus resultados de rigideces experimentales laterales, con los obtenidos con diversos criterios existentes de predicción de rigidez lateral muestra que estos criterios deben ser mejorados de manera sustancial (Restrepo y Rodriguez, 2020). Además, como se comenta en el siguiente capítulo, las propuestas en la literatura de definición de rigidez lateral de columnas son limitadas, y se requiere una mejor definición.

En este estudio se emplea un modelo principalmente analítico, calibrado con resultados experimentales, para predecir en columnas circulares de concreto reforzado, tanto el desplazamiento de fluencia como la rigidez lateral efectiva, la que se define para una fracción específica de su capacidad a flexo-compresión. Este modelo toma en cuenta fuentes de desplazamientos de regiones específicas de una columna que llevan al desplazamiento lateral total de ésta. El comportamiento de estas fuentes es complejo; sin embargo, el modelo

empleado se ha simplificado con aproximaciones razonables, como se muestra en este estudio.

De la base de datos de PEER, así como de la información existente en la literatura, se seleccionó de manera cuidadosa una base de datos de columnas circulares, las que fueron ensayadas ante cargas laterales en diversos laboratorios del mundo, y cuyas condiciones de borde en los ensayos representan bien las condiciones que se encuentran en la práctica. Los resultados de la predicción de la rigidez lateral efectiva empleando la base de datos y el modelo propuesto se compararon con los resultados experimentales.

En el contexto de este estudio se define la rigidez lateral efectiva como la rigidez secante cuando la sección crítica de la columna resiste  $2/3$  del momento probable. Además, se propone un criterio para definir la rigidez lateral para fracciones de la capacidad a flexo-compresión de la columna entre el valor correspondiente a la terminación de la parte lineal de la respuesta de la sección y el valor correspondiente al  $2/3$  del momento probable resistente de la sección.

## 2. Revisión de La Literatura y El Problema de La Definición de Rigidez Lateral Efectiva en Columnas Circulares de Concreto Reforzado

### 2.1 Propuesta para la Predicción de la Rigidez a Flexión Lateral Efectiva de Columnas

Existen diversas propuestas para la predicción de la rigidez a flexión lateral efectiva de columnas de concreto reforzado: este estudio las divide en dos grupos, uno correspondiente a los casos de diseño, y otro que se emplearían para la revisión de estructuras existentes. Ejemplo del primer grupo son los requisitos de diseño del ACI 318-19 (ACI 318-19, 2019) y AASHTO (2011). Ejemplos del segundo grupo son las recomendaciones del ASCE/SEI 41-17 (ASCE, 2017), así como las expresiones propuestas por Elwood y Eberhard (2009). Estas propuestas se evalúan en lo que sigue.

*Expresiones para diseño:*

*ACI 318-19*

Con el fin de calcular la rigidez a flexión lateral efectiva de una columna,  $E_c I_{eff}$ , donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad del concreto y  $I_{eff}$  es el momento de inercia efectivo de la sección, el ACI 318-19 (ACI 318, 2019) especifica cuatro opciones para el cómputo de la rigidez a flexión de la sección, que se describen en lo siguiente.

a) Para miembros en flexocompresión, el ACI 318-19 especifica para  $\frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g}$  usar el valor

0.7, donde  $I_g$  es el momento de inercia de la sección bruta.

b) El ACI 318-19 especifica expresiones para  $\frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g}$  basadas en el trabajo de Khuntia y

Ghosh (2004). Para el caso de miembros en flexión ( $P_u/A_g f'_c < 0.1$ ), el ACI 318-19 especifica usar la expresión

$$0.25 \leq \frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g} = (0.1 + 25\rho) \left( 1.2 - 0.2 \frac{b_w}{d} \right) \leq 0.5 \quad (2.1)$$

donde  $b_w$  es el ancho del alma o diámetro de la sección circular,  $d$  es la distancia desde la fibra extrema en compresión hasta el centroide del refuerzo longitudinal en tracción,  $\rho$  la cuantía del refuerzo longitudinal a tracción evaluada sobre el área  $bd$ , y  $b$  es el ancho de la cara en compresión de la sección.

Para miembros en flexocompresión, el ACI 318-19 especifica usar la expresión:

$$0.35 \leq \frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g} = (0.8 + 25\rho_l) \left( 1 - \frac{M_u}{P_u h} - 0.5 \frac{P_u}{P_o} \right) \leq 0.875 \quad (2.2)$$

donde  $P_u$  es la fuerza axial mayorada en la sección,  $\rho_l$  es la cuantía de refuerzo longitudinal en la columna valuada en el área de la sección,  $M_u$  es el momento mayorado en la sección, y  $P_o$  es la resistencia axial nominal para una excentricidad igual a cero.

Se debe tener en cuenta que el cómputo de la rigidez efectiva con la ec 2.2 tiene varias soluciones. Esto se debe a que los valores de  $P_u$  y  $M_u$  se obtienen con procedimientos establecidos por reglamentos de diseño, con estos procedimientos existen varias combinaciones posibles de  $P_u$  y  $M_u$ , lo que debe ser tomado en cuenta en el empleo de la ec 2.2.

c) De manera alternativa el ACI 318-19 permite emplear 50 por ciento de los valores de rigidez basado en propiedades de la sección no agrietada, y

d) Finalmente, el ACI 318-19 también permite emplear un análisis detallado para encontrar la rigidez efectiva.

*AASHTO (2011)*

La AASHTO (2011) especifica dos alternativas para definir la rigidez efectiva  $E_c I_{eff}$  en columnas. La primera alternativa emplea la siguiente expresión para  $E_c I_{eff} / E_c I_g$ ,

$$\frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g} = \frac{M_n}{\Phi_y E_c I_g} \quad (2.3)$$

donde  $M_n$  es el momento nominal de la sección de columna,  $\Phi_y$  es la curvatura en la fluencia en un modelo bilineal de la curva momento-curvatura. El parámetro  $\Phi_y h$  se define como (Priestley, 2003)

$$\Phi_y h = \alpha \varepsilon_y \quad (2.4)$$

donde  $\alpha$  es igual a 2.25 para columnas circulares.

En la segunda alternativa que da la AASHTO (2011) para definir la rigidez efectiva  $E_c I_{eff}$  en columnas, se estima esta rigidez con la ayuda de graficas (Figura 5.6.2-1 de la AASHTO 2011).

*Expresiones para el Cómputo de Rigideces Efectivas en Columnas para la Revisión de Estructuras Existentes*

*ASCE/SEI 41-17 (ASCE, 2017)*

Existen recomendaciones para el cómputo de rigideces laterales efectivas a flexión en estructuras existentes propuestas por las recomendaciones de ASCE/SEI 41-17 (ASCE, 2017). Para columnas con compresiones causadas por cargas gravitacionales de diseño, o con cargas en tracción, el ASCE/SEI 41-17 recomienda  $\frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g} = 0.3$  . Para columnas con

compresiones causadas por cargas gravitacionales de diseño  $\geq 0.5 A_g f'_c$  , el ASCE/SEI 41-17 recomienda  $\frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g} = 0.7$  . Para columnas con carga en compresión entre los límites

mencionados el referido documento recomienda obtener la rigidez efectiva por interpolación

lineal. Para el cómputo de la rigidez efectiva  $E_c I_{eff}$ , las recomendaciones del ASCE/SEI 41-17 emplean la carga gravitacional sin mayorar.

*Elwood y Eberhard (2009)*

Elwood y Eberhard (2009) emplearon una base de datos de ensayos ante cargas laterales de 221 columnas rectangulares y 108 columnas circulares. Estos autores propusieron la siguiente expresión para la rigidez lateral efectiva.

$$\frac{E_c I_{eff}}{E_c I_g} = \frac{0.45 + 2.5 \frac{P}{A_g f'_c}}{1 + 110 \frac{d_b h}{h L}} \leq 1.0 \text{ y } \geq 0.2 \quad (2.5)$$

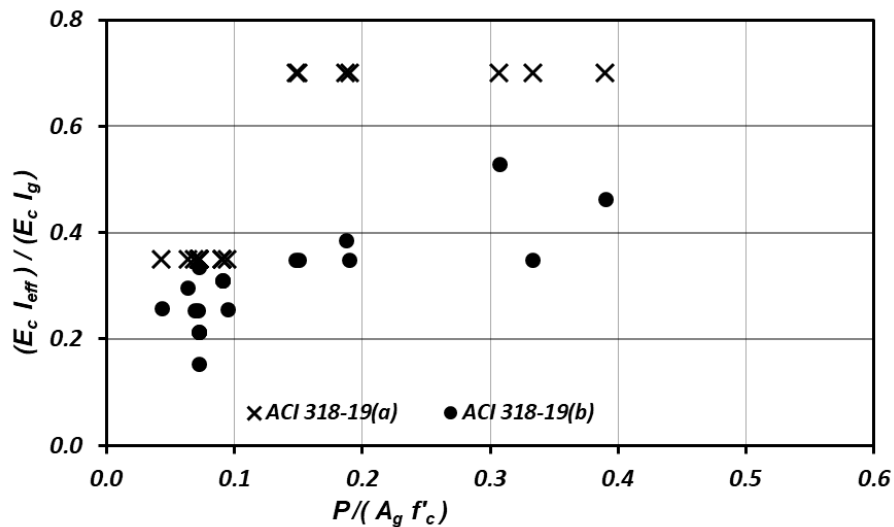
donde  $P$  es la carga axial actuante en la columna en el ensaye de ésta,  $d_b$  es el diámetro de las barras de refuerzo longitudinal,  $h$  el peralte de la columna, y  $L$  el claro de cortante o longitud de una columna en voladizo. Estos autores proponen como expresión simplificada emplear la ec 2.5 con valores de la relación  $d_b/h$  iguales a 1/25 y 1/18, para columnas de puentes y edificios, respectivamente.

Se debe mencionar que el criterio de Elwood y Eberhard (2009) se basa, entre otras hipótesis, en el empleo del valor de la deformación del concreto,  $\epsilon_o$ , parámetro que se define como la deformación del concreto cuando alcanza el esfuerzo máximo en compresión. Estos autores emplearon el valor 0.002 para  $\epsilon_o$ . En realidad, este parámetro no es constante y depende entre otros factores de  $f'_c$ , como ha sido mostrado por De Nicolo et al. (1994), Collins y Mitchell (1991), y del tamaño del cilindro, Chen et al. (2014), por lo que es de esperar que este parámetro sea una fuente importante en la variabilidad de resultados que se obtengan con el criterio de Elwood y Eberhard (2009).

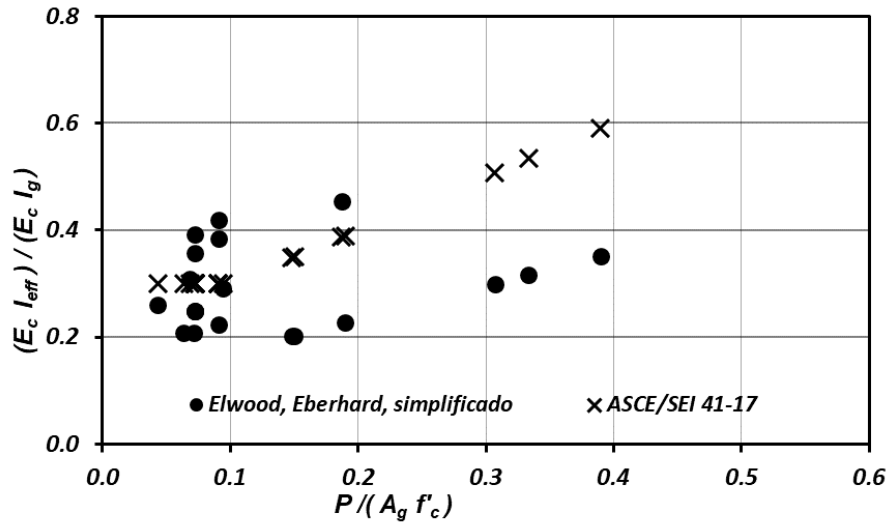
*Comparativa de Resultados de Predicción de Rigideces Obtenidas con los Procedimientos Descritos para el Caso de la Base de Datos de Este Estudio*

En el Capítulo 3 se describe en detalle las características de la base de datos empleada en este estudio para el estudio de rigideces efectivas. Esta base de datos consiste de 22 columnas circulares. En lo que sigue se comparan las rigideces efectivas obtenidas con esta base de datos empleando los diversos procedimientos descritos en este estudio.

La figura 2.1 muestra resultados de cómputo de rigideces efectivas para la base de datos de columnas circulares. La figura 2.1a se refiere al caso de diseño según el ACI 318-19, y la figura 2.1b se refiere a los casos de procedimientos para la revisión de estructuras existentes.



(a) Resultados con el ACI 318-19 (a)



(b) Resultados con procedimientos propuestos para estructuras existentes

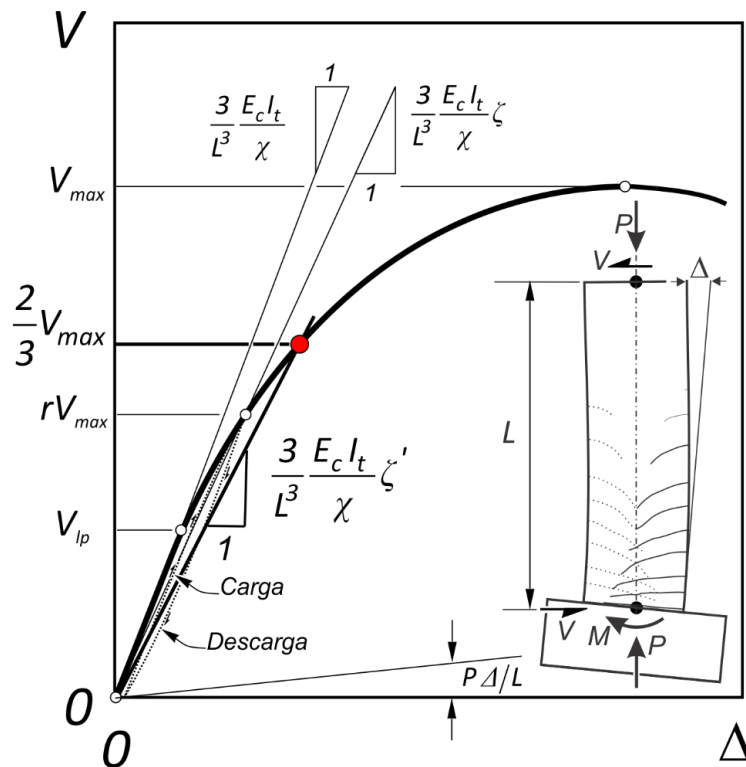
**Figura 2.1** Rigideces efectivas obtenidas empleando procedimientos existentes para el caso de columnas circulares de la base de datos de este estudio

Los resultados de la figura 2.1 para la predicción de rigideces efectivas empleando procedimientos existentes indican una variabilidad importante en los resultados de esta predicción. Como muestra esta revisión de la literatura, es necesario contar con un procedimiento que lleve a una predicción de la rigidez lateral efectiva de columnas de concreto reforzado que tome en cuenta su comportamiento y que tenga una correlación aceptable con los resultados medidos. En lo que sigue se describe en detalle la naturaleza del problema de la definición de la rigidez lateral efectiva.



## 2.2 El Problema de la Definición de Rigidez Lateral Efectiva en una Columna de Concreto Reforzado

La figura 2.2 muestra la curva carga lateral-desplazamiento de una columna de concreto reforzado obtenida de ensayos experimentales, con claro de cortante  $L$ , sometida a la carga lateral  $V$ , la cual se define como la fuerza lateral efectiva medida desde el estado inicial sin carga lateral, al valor  $V_{max}$ , el cual se define como la fuerza lateral efectiva máxima medida.



**Figura 2.2** Definición de rigidez efectiva de una columna empleando resultados experimentales.

### *Rigidez Lateral Efectiva de Columnas Considerando Deformaciones por Cortante*

De manera rigurosa, en el cálculo del desplazamiento lateral,  $\Delta$ , en una columna debido a la carga lateral,  $V$ , se debe considerar tanto el desplazamiento por flexión,  $\Delta_f$ , como la contribución de la fuerza cortante al desplazamiento,  $\Delta_v$ . Por ejemplo, los programas de

análisis estructural tienen la opción de considerar deformaciones por cortante de manera explícita. En estos casos la rigidez lateral efectiva que se emplee debe ser tal que no duplique el cómputo del efecto de deformaciones por cortante. Esto fue el motivo para proponer en este estudio un procedimiento de cómputo de rigidez lateral efectiva para su empleo en programas de cómputo convencionales.

La figura 2.2 muestra los valores de cargas laterales en la columna,  $V_{lp}$ ,  $rV_{max}$ , y  $\frac{2}{3}V_{max}$ , y para cada uno de estos valores se define su rigidez efectiva respectiva. La carga lateral  $V_{lp}$  es la fuerza que produce que se alcance el límite de proporcionalidad en la base de la columna. Para cargas laterales con valores entre la condición sin carga y la carga lateral  $V_{lp}$ , el momento de inercia efectivo correspondiente es igual a  $I_t$ , donde  $I_t$  es el momento de inercia de la sección transformada. El valor de la rigidez lateral efectiva para cargas laterales en este intervalo,  $K_o$ , es

$$K_o = \frac{3 E_c I_t}{L^3 \chi} \quad (2.6)$$

Restrepo y Rodriguez (2020) muestran que en el intervalo  $V_{lp} < V < \frac{2}{3} V_{max}$ , la rigidez lateral efectiva en columnas rectangulares y circulares,  $K_e$ , está dada por

$$K_e = \frac{3 E_c I_t}{L^3 \chi} \zeta \quad (2.7)$$

donde  $E_c$  es el modulo de elasticidad del concreto,  $\zeta$  es el factor de modificación de rigideces, de las ecs. (2.6) y (2.7) se tiene

$$\zeta = \frac{K_e}{K_o} \quad (2.8)$$

Además, en la ec (2.7)  $\chi$  es el factor de cortante, el cual para columnas circulares es igual a (Cowper, 1996):

$$\chi = 1 + \frac{0.5I}{\left(\frac{a_v}{h}\right)^2} \quad (2.9)$$

El valor  $\frac{2}{3}V_{max}$  es un valor de la carga lateral en la curva para la cual en este estudio se supone que se conoce su rigidez efectiva, El valor de la rigidez lateral efectiva para carga lateral igual a  $\frac{2}{3}V_{max}$ ,  $K'_{eff}$ , es  $\frac{3 E_c I_t}{L^3 \chi} \zeta'$ , donde  $\zeta'$  es el factor de modificación de rigidez correspondiente al valor de la referida carga, y se define como la relación entre el momento de inercia efectivo en esta carga,  $I_{e2/3}$ , y  $I_t$ . La carga lateral  $rV_{max}$  tiene valores en el intervalo  $V_{lp}$  a  $\frac{2}{3}V_{max}$ , y su rigidez efectiva,  $K_{eff}$ , es  $\frac{3 E_c I_t}{L^3 \chi} \zeta$

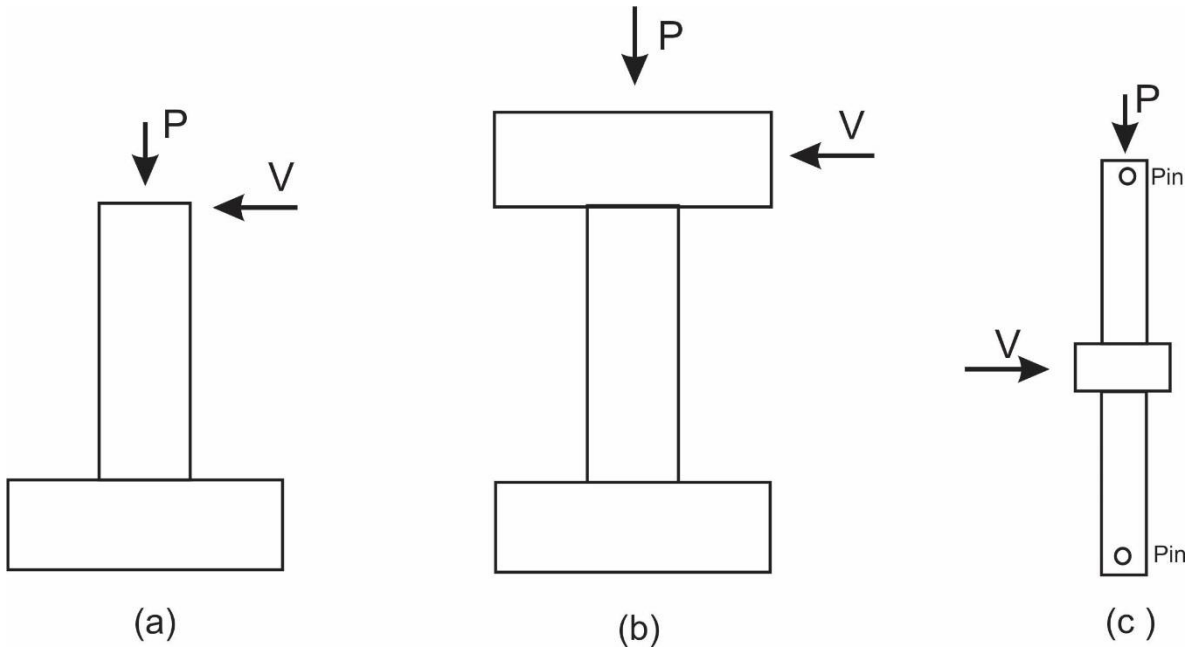


### **3. Base de Datos empleada en este Estudio**

La base de datos de ensayos de columnas empleada en este estudio consideró parte de la base de datos de columnas de PEER (Berry et al., 2004), estos autores se identifican como B1 en la Tabla 3.1, además de información de otros autores, R1 en la Tabla 3.1 identifica a Stephan et al., 2003; Restrepo et al., 2006. La base de datos de columnas empleada en este estudio contiene información de la respuesta carga lateral-deformación obtenida en ensayos de columnas rectangulares y circulares, así como información de los materiales empleados, geometría y valores de carga axial. La base de datos de PEER tiene información de más de 400 columnas rectangulares y circulares con diversas configuraciones de ensaye, tales como voladizo, doble curvatura y doble voladizo, ver figuras (a), (b) y (c) de la figura 3.1, respectivamente. Sin embargo, para este estudio se descartaron los especímenes en doble voladizo, figura 3.1(c), debido a que en este tipo de ensayos no se presenta el fenómeno de deslizamiento de barras por adherencia, típico cuando éstas llegan a la cimentación o a un nudo viga-columna rígido.

Con el fin de que el estudio refleje de manera adecuada las características de columnas típicas existentes, también se descartaron especímenes con dimensiones menores que 350 mm, excepto el caso empleado de una columna circular de diámetro 305 mm. También se descartaron los casos de especímenes con relaciones claro de cortante a peralte menores que 2.0. Estos criterios de selección de especímenes para este estudio llevaron a que el número de columnas finalmente seleccionadas fuera bastante menor que el número de columnas existente en la literatura. La base de datos seleccionada para este estudio contiene información de 22 columnas de sección circular. La información más importante que se empleó en este estudio para el análisis de desplazamientos de estas columnas se muestra en las Tablas 3.1 a 3.2. Por ejemplo, la Tabla 3.1 muestra los nombres de los especímenes (col

2), referencias (col 3), y los países donde se desarrolló la investigación (col 4), los que fueron Canadá (CA), Estados Unidos (USA), Japón (J) y Nueva Zelanda (NZ).

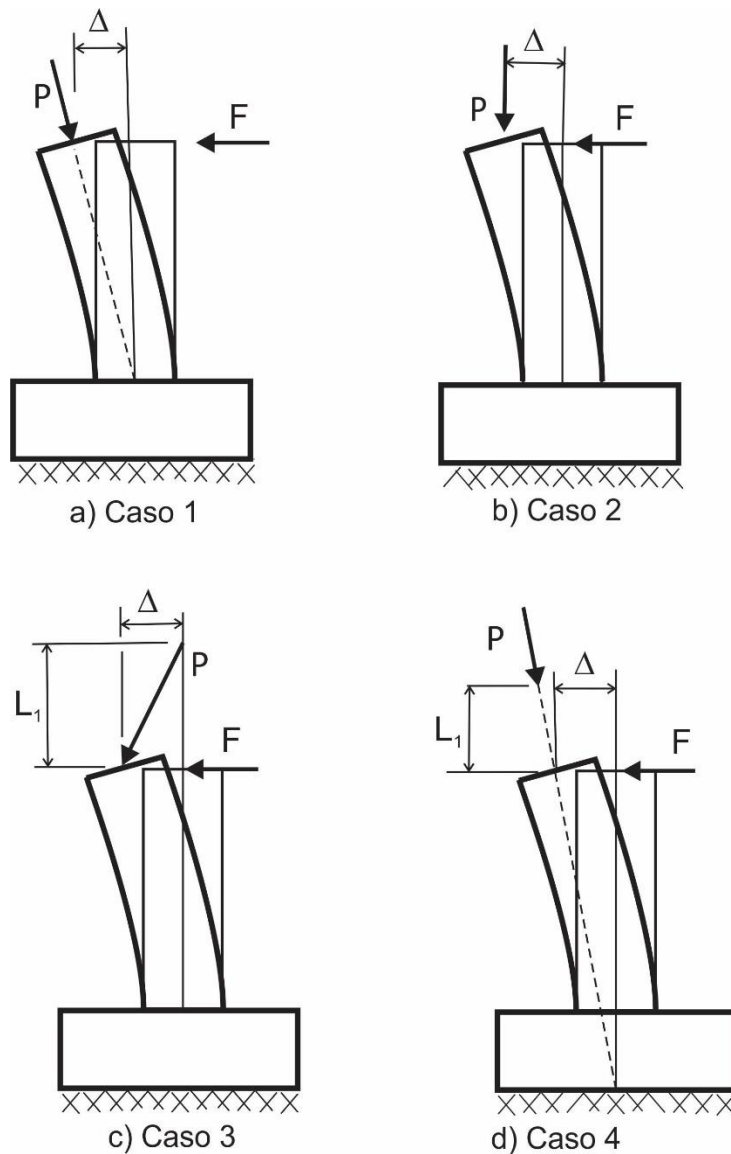


**Figura 3.1** Configuraciones de ensayos de columnas: (a) voladizo, b) doble curvatura y c) doble voladizo

También la Tabla 3.1 muestra los casos de efecto  $P-\Delta$  del tipo de ensaye de los especímenes (col 5), estos casos se clasifican en cuatro tipos, con los números del 1 al 4, los que se muestran en la Fig 3.2. En los especímenes cuyos ensayos correspondieron a los casos 2 al 4 se hicieron las correcciones necesarias en las fuerzas aplicadas para tomar en cuenta el efecto  $P-\Delta$ . La razón de esta corrección es poder tener una relación directa entre el momento máximo medido en la base de la columna,  $M_{max}$ , y la carga lateral  $V_{max}$ , es decir  $M_{max} = V_{max}L$ . La Tabla 3.1 también muestra las dimensiones del peralte,  $h$  (col 6), y ancho,  $b$  (col 7), de las columnas.

Todas las columnas tenían el refuerzo transversal espaciados a un máximo de seis veces el diámetro del refuerzo longitudinal, excepto una columna circular con un espaciado de 6.7 veces el diámetro del refuerzo longitudinal.

Los ensayos de columnas fueron del tipo quasi-estático con una historia de carga lateral cíclica reversible y con carga axial constante. Todas las columnas desarrollaron rótulas plásticas en su base. El intervalo de valores de la resistencia a compresión del concreto fue limitado. Por ejemplo, en 95% de columnas circulares este intervalo fue  $29.0 \text{ MPa} \leq f'_c \leq 39.4 \text{ MPa}$ .



**Figura 3.2** Casos de efecto  $P-\Delta$  en los especímenes de la base de datos de este estudio

Referente al grado del refuerzo de los especímenes de la base de datos, 5% son de Grado 275 MPa, 86% del Grado 420 MPa y 9% del Grado 500 MPa. La Tabla 3.1 también muestra valores de la relación  $f_{su}/f_y$ , (col 9), donde  $f_{su}$  es el esfuerzo último medido de las barras de refuerzo longitudinal. Además, la Tabla 3.1 muestra valores del esfuerzo de fluencia medido del refuerzo transversal,  $f_{yt}$ , (col 10).

Referente a la cuantía de refuerzo longitudinal,  $\rho_l$  (col 11) , el 59% de columnas circulares tiene  $1.5\% \leq \rho_l \leq 2.4\%$ , y en el 23% de columnas  $\rho_l \geq 3.0\%$ . La relación cuantía del refuerzo transversal de la columna,  $\rho_s$ , a cuantía especificada por el ACI 318-19 (ACI 318, 2019),  $\rho_{sACI}$ , en el 36% de columnas circulares de la base de datos se tiene  $\rho_s/\rho_{sACI} \leq 1$ .

El intervalo de valores de la relación de carga axial  $P/(A_g f'_c)$  en la base de datos varía desde carga axial en tracción a carga axial en compresión con el valor 0.39, col 13 de la Tabla 3.1. El 68 % de columnas circulares tiene  $P/(A_g f'_c) \leq 0.1$ , lo que se debe a que gran parte de ensayos de la base de datos ha sido para el estudio de columnas circulares de puentes.

La Tabla 3.2 muestra valores de diámetros de las barras de refuerzo longitudinal y transversal,  $d_b$  y  $d_{bt}$  (cols 3 y 4), respectivamente. La col 5 de la Tabla 3.2 muestra valores de la relación  $l_b/d_b$ , donde  $l_b$  es la longitud de la parte recta de la barra de la columna que se ancla dentro de la cimentación. Se puede apreciar que el valor mínimo de la relación  $l_b/d_b$  para las columnas de la base de datos es 16.

La col 8 de la Tabla 3.2 muestra valores del coeficiente  $\gamma$ , definido como la relación de la distancia medida entre los centroides de las barras exteriores de la sección y la dimensión  $h$ . La col 9 de la Tabla 3.2 muestra valores del recubrimiento de la barra de refuerzo,  $c_c$ , definido como la distancia de la fibra extrema de la sección al exterior del refuerzo transversal. También la col 10 de la Tabla 3.2 muestra valores de la relación claro de cortante a peralte de la sección,  $a_v/h$ . La relación  $a_v/h$  tiene valores máximos y mínimos de 10 y 2, respectivamente. Además, la Tabla 3.2 muestra el valor de la carga lateral actuante máxima medida en el ensayo de la columna,  $V_{max}$  (col 11).



TABLA 3.1 DATOS PARA COLUMNAS CIRCULARES. PARTE 1

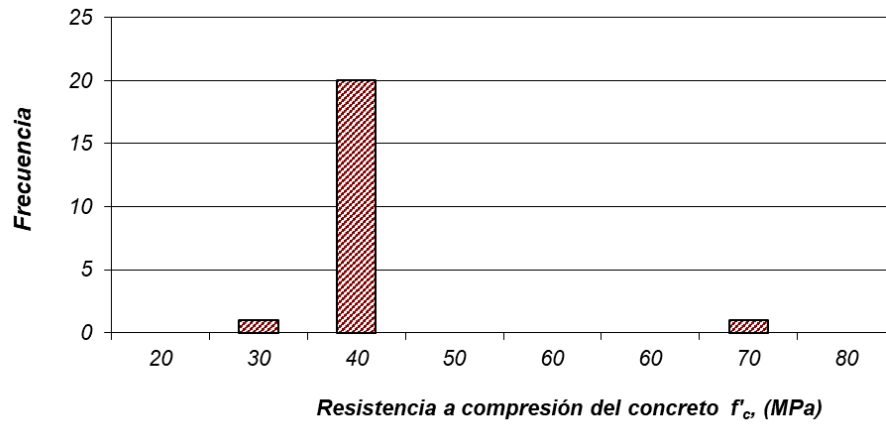
N°	Nombre	Referencia	País	P- $\Delta$	$h$ (mm)	$f'_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$f_{su}/f_y$	$f_{yt}$ (MPa)	$\rho_l$	$\rho_l \frac{f_y}{f'_c}$	$P / (A_g f'_c)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	VUNH 2	B1	USA	1	457	39.2	428	NR	430	0.024	0.263	-0.10
2	VUNH 5	B1	USA	1	457	35.2	508	NR	448	0.024	0.347	-0.08
3	KOWALSU1	B1	USA	1	457	32.7	565	1.23	434	0.021	0.358	0.04
4	RES-U1	R1	USA	4	914	64.1	426	1.67	414	0.025	0.169	0.06
5	NIST-F	B1	USA	2	1,520	35.8	475	NR	493	0.020	0.265	0.07
6	NIST-S	B1	USA	2	1,520	34.3	475	NR	435	0.020	0.277	0.07
7	LEH1015	B1	USA	4	610	31.0	462	1.36	607	0.015	0.224	0.07
8	LEH407	B1	USA	4	610	31.0	462	1.36	607	0.008	0.112	0.07
9	LEH415	B1	USA	4	610	31.0	462	1.36	607	0.015	0.224	0.07
10	LEH430	B1	USA	4	610	31.0	462	1.36	607	0.030	0.452	0.07
11	LEH815	B1	USA	4	610	31.0	462	1.36	607	0.015	0.224	0.07
12	CAL328	B1	USA	3	610	34.5	441	1.36	607	0.027	0.349	0.09
13	CAL828	B1	USA	3	610	34.5	441	1.36	607	0.027	0.349	0.09
14	CAL1028	B1	USA	3	610	34.5	441	1.36	607	0.027	0.349	0.09
15	KUN97A2	B1	USA	2	305	29.0	448	1.54	434	0.020	0.315	0.09
16	VU98NH4	B1	USA	1	457	35.0	468	NR	434	0.052	0.697	0.15
17	VU98NH3	B1	USA	1	457	39.4	428	NR	430	0.024	0.261	0.15
18	CHAI-3	B1	USA	3	610	32.6	315	1.58	352	0.025	0.246	0.19
19	WONG90U1	B1	NZ	2	400	38.0	423	1.36	300	0.032	0.356	0.19
20	VU98NH1	B1	USA	1	457	38.3	428	NR	430	0.024	0.269	0.31
21	VU98NH6	B1	USA	1	457	35.0	486	NR	434	0.052	0.724	0.33
22	WONG90U3	B1	NZ	2	400	37.0	475	1.32	300	0.032	0.411	0.39
					Promedio	35.6	454		483	2.6%	0.329	0.11
					Max.	64.1	565		607	5.2%	0.724	0.39
					Min.	29.0	315		300	0.8%	0.112	-0.10

TABLA 3.2 DATOS PARA COLUMNAS CIRCULARES. PARTE 2

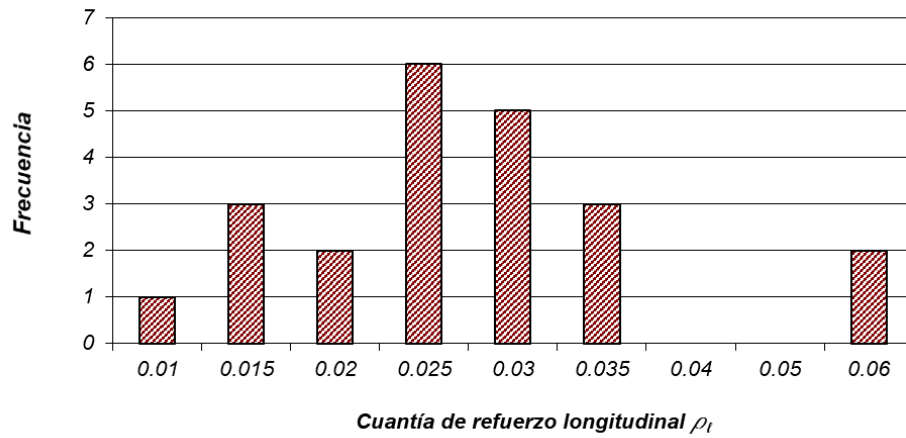
N°	Nombre	$d_b$ (mm)	$d_{bt}$ (mm)	$l_b/d_b$	$\rho_s/\rho_{sACI}$	$s/d_b$	$\gamma$	$c_c$ dist a borde de estribo (mm)	$a_v/h$	$V_{max}$ (kN)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	VUNH 2	15.9	9.5	40	1.06	3.77	0.70	24.8	2.0	279
2	VUNH 5	15.9	9.5	40	0.92	5.03	0.70	24.8	2.0	379
3	KOWALSU1	19.0	9.5	16	0.96	4.00	0.75	12.7	5.3	153
4	RES-U1	15.9	9.7	41	0.85	2.52	0.69	58.0	3.2	1485
5	NIST-F	43.0	15.9	45	0.73	2.07	0.74	58.7	6.0	1480
6	NIST-S	43.0	19.1	45	1.60	1.26	0.74	60.3	3.0	3300
7	LEH1015	16.0	6.4	29	1.16	2.00	0.75	22.2	10.0	98
8	LEH407	16.0	6.4	29	1.16	2.00	0.76	22.2	4.0	178
9	LEH415	16.0	6.4	29	1.16	2.00	0.75	22.2	4.0	285
10	LEH430	16.0	6.4	29	1.16	2.00	0.73	22.2	4.0	476
11	LEH815	16.0	6.4	29	1.16	2.00	0.75	22.2	8.0	151
12	CAL328	19.0	6.4	16	1.34	1.34	0.72	28.6	3.0	556
13	CAL828	19.0	6.4	16	1.34	1.34	0.72	28.6	8.0	204
14	CAL1028	19.0	6.4	16	1.34	1.34	0.72	28.6	10.0	190
15	KUN97A2	9.5	4.0	82	1.20	2.00	0.72	14.5	4.5	74
16	VU98NH4	19.0	12.7	33	2.76	2.37	0.66	26.4	2.0	986
17	VU98NH3	16.0	9.5	39	1.06	3.75	0.70	24.8	2.0	551
18	CHAI-3	19.0	6.4	19	0.16	6.68	0.74	20.0	6.0	239
19	WONG90U1	16.0	10.0	31	0.96	3.75	0.69	20.0	2.0	495
20	VU98NH1	15.9	9.5	40	0.80	3.77	0.70	24.8	2.0	585
21	VU98NH6	19.0	12.7	33	2.19	2.11	0.67	24.8	2.0	1100
22	WONG90U3	16.0	10.0	31	0.58	3.75	0.69	20.0	2.0	626
Promedio					1.17	2.77			4.3	
Max.					2.76	6.68			10.0	
Min.					0.16	1.26			2.0	

### Histogramas de principales características de las columnas de la base de datos

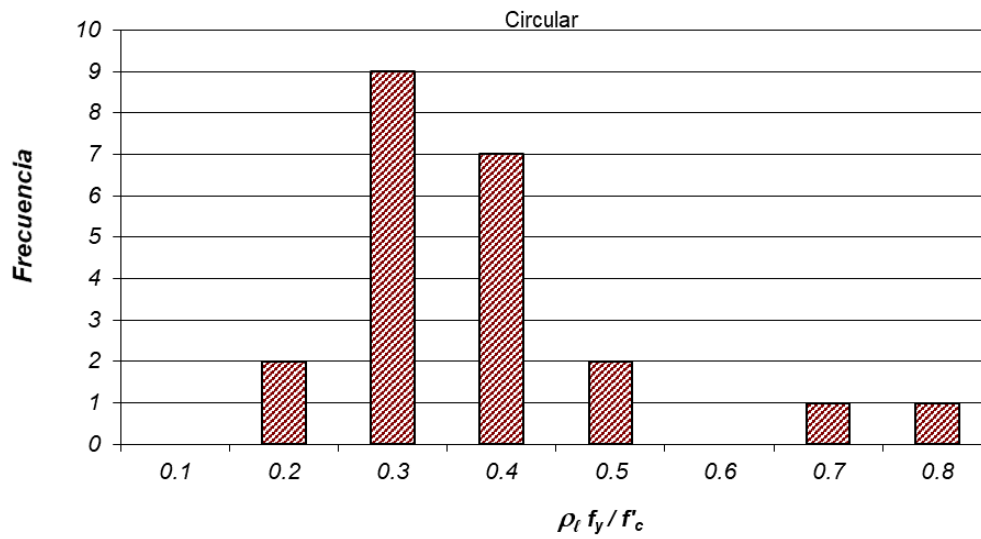
La figura 3.3 muestra el histograma para la resistencia medida a compresión del concreto,  $f'_c$ , para las circulares de la base de datos empleada en este estudio. Las figuras 3.4 a 3.7 muestran, para la base de datos, histogramas para la cuantía de refuerzo longitudinal,  $\rho_l$ ; parámetro  $\rho_l f_y / f'_c$ ; relación de aspecto,  $a_v/h$ ; y relación de carga axial  $P/(A_g f'_c)$ , respectivamente. Las figuras 3.8 y 3.9 muestran los histogramas para la relación  $h/d_b$  y el coeficiente  $\gamma$ , respectivamente.



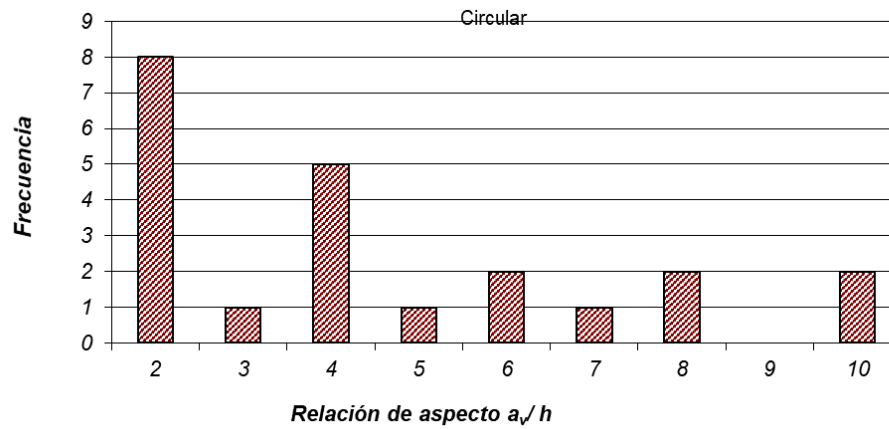
**Figura 3.3** Histograma para la resistencia a compresión del concreto  $f'_c$ .



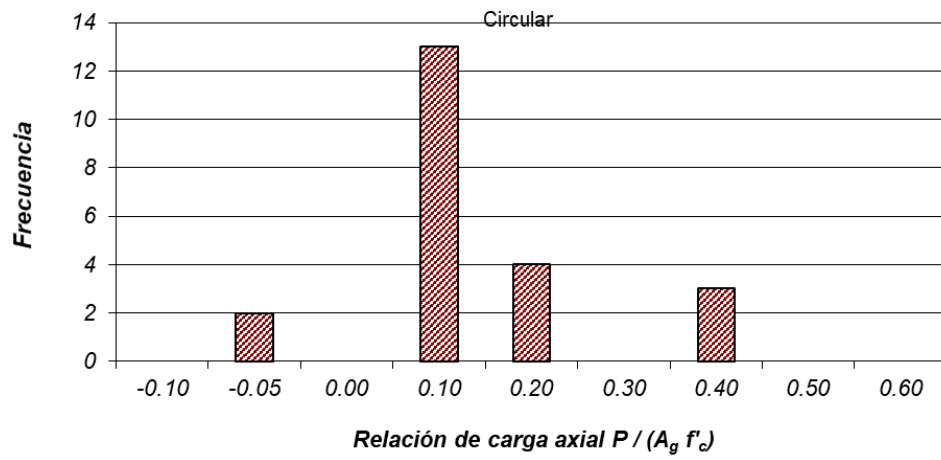
**Figura 3.4** Histograma para la cuantía de refuerzo longitudinal  $\rho_l$ .



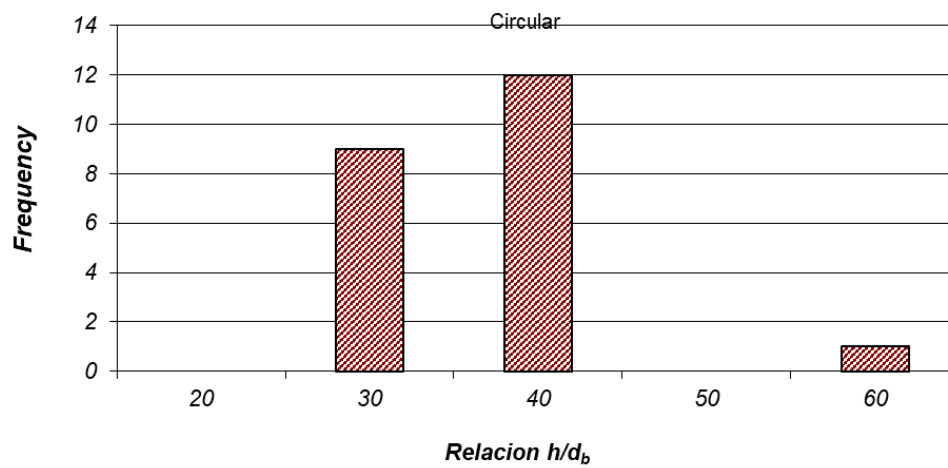
**Figura 3.5** Histograma para  $\rho_t f_y / f_c$



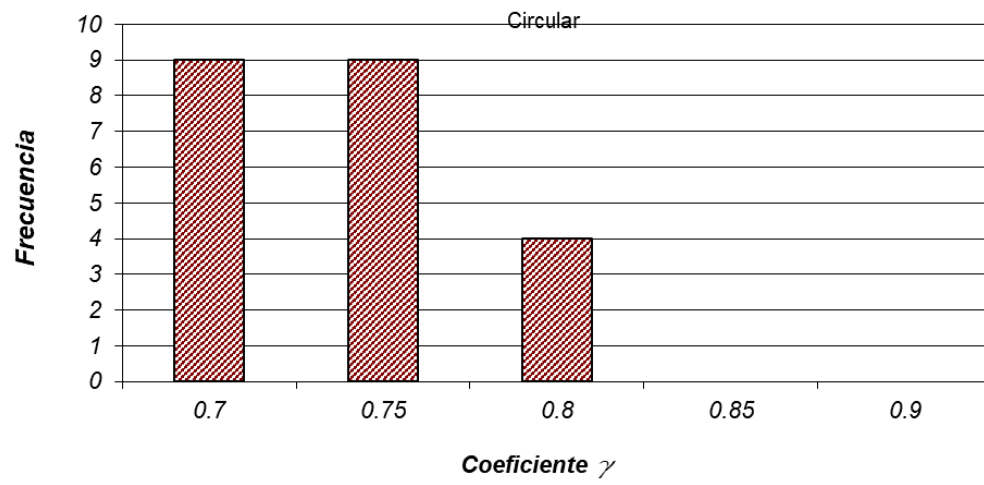
**Figura 3.6** Histograma para la relación de aspecto  $a/h$



**Figura 3.7** Histograma para la relación de carga axial  $P/(A_g f'_c)$



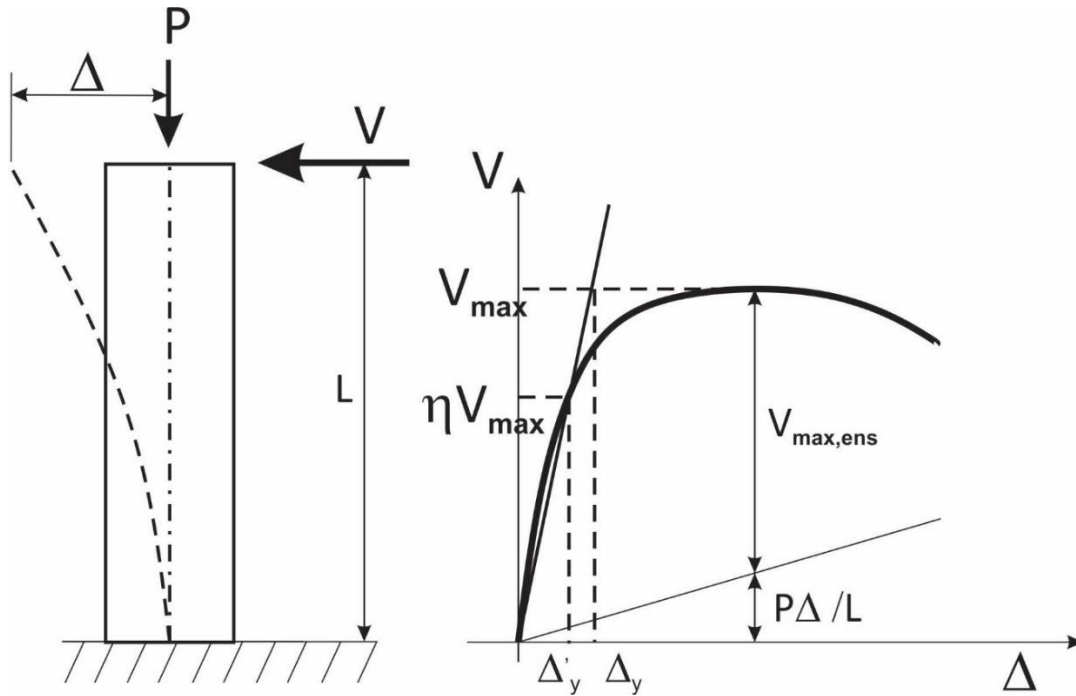
**Figura 3.8** Histograma para la relación  $h/d_b$



**Figura 3.9** Histograma para el coeficiente  $\gamma$

## 4. Definición de Rigidez Lateral en Columnas

La figura 4.1a muestra una columna en voladizo de altura  $L$ , empotrada en su base, sometida a la carga axial,  $P$ , y a la carga lateral,  $V$ , esta columna tiene el desplazamiento lateral,  $\Delta$ , en su extremo superior. La figura 4.1b muestra de manera esquemática la relación carga-desplazamiento experimental debido a la carga lateral efectiva aplicada. La aplicación de carga vertical en una columna en un ensaye produce el llamado efecto  $P-\Delta$ . Para tomar en cuenta este efecto, en los especímenes estudiados se corrigieron los resultados experimentales, para lo cual se empleó el procedimiento que consiste en sumar la carga lateral  $P \Delta / L$ , debido al efecto  $P-\Delta$ , a la carga lateral aplicada en el ensaye. Esto se ilustra en la figura 4.1b, donde se observa que, para el caso particular de obtener la fuerza lateral máxima efectiva,  $V_{max}$ , ésta se obtiene como la suma de las fuerzas laterales  $P \Delta / L$  y  $V_{max,ens}$ , donde esta última fuerza es la carga lateral máxima aplicada en el ensaye.



(a) Columna con carga lateral y axial

(b) Curva experimental carga-desplazamiento

**Figura 4.1** Definición del desplazamiento de fluencia empleando resultados experimentales

La figura 4.1b muestra la definición generalizada de desplazamiento de fluencia empleada en este estudio, en la cual se emplea la rigidez secante en la ordenada  $\eta V_{max}$ , con lo cual se define el desplazamiento  $\Delta'_y$ , lo que lleva a definir el desplazamiento de fluencia

$\Delta_y$  como

$$\Delta_y = \frac{\Delta'_y}{\eta} \quad (4.1)$$

El valor de  $\eta$  se obtuvo a partir de una minimización del error entre la predicción del desplazamiento de fluencia que se propone en este estudio y el desplazamiento de fluencia



experimental que se obtiene de una propuesta de expresión generalizada de rigideces experimentales que se describe en lo que sigue.

Se empleó la base de datos de ensayos de columnas descrita en el Capítulo 3, con el fin de obtener valores experimentales de la carga lateral máxima  $V_{max}$  (kN), correspondiente al momento máximo medido en la base de la columna,  $M_{max}$  (kN-m). Con el empleo de la ec (4.1), y la definición de rigidez lateral dada en la figura 4.1b, en la envolvente experimental de la curva  $V-\Delta$  de cada espécimen ensayado se definieron tres valores experimentales del desplazamiento de fluencia  $\Delta_y$ , correspondientes a valores del parámetro  $\eta$  iguales a 0.5, 0.625 y 0.75. Con estos tres valores de  $\Delta_y$  y empleando como definición de rigidez lateral a la rigidez secante en la ordenada  $\eta V_{max}$ , figura 4.1b, se obtuvieron las rigideces experimentales  $K_{50test}$ ,  $K_{625test}$  y  $K_{75test}$ , respectivamente. Con estos valores de rigideces se obtuvieron los coeficientes de rigideces efectivas,  $EI_{eff1}/EI_g$ ,  $EI_{eff2}/EI_g$  y  $EI_{eff3}/EI_g$ , empleando las siguientes expresiones:

$$\frac{EI_{eff1}}{EI_g} = \frac{K_{50test} L^3}{3E_c I_g} \quad (4.2)$$

$$\frac{EI_{eff2}}{EI_g} = \frac{K_{625test} L^3}{3E_c I_g} \quad (4.3)$$

$$\frac{EI_{eff3}}{EI_g} = \frac{K_{75test} L^3}{3E_c I_g} \quad (4.4)$$

En vez de usar el valor de  $E_c$  especificado por el ACI 318-14, en este estudio se ha empleado el valor de  $E_c$  para concretos de peso normal como ha sido recomendado por Carrasquillo et al. (1981):

$$E_c = 3320\sqrt{f'_c} + 6900 \quad (\text{en MPa}) \quad (4.5)$$

Se define la relación  $EI_{eff@ \eta Mmax}/EI_g$  como el valor de  $EI_{eff}/EI_g$  correspondiente a un valor cualquiera de  $\eta$ . Se empleó la siguiente relación generalizada de rigidez efectiva a bruta,  $EI_{eff@ \eta Mmax}/EI_g$ :

$$y = a x^2 + b x + c \quad (4.6)$$

donde

$$y = \frac{EI_{eff@ \eta Mmax}}{EI_g} \quad (4.7)$$

$$x = \eta \quad (4.8)$$

Las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ec (4.6) se definieron considerando que si se conocen tres puntos de una parábola, es posible conocer estas constantes. Las abscisas de estos tres puntos están dadas por los valores de  $\eta$  iguales a 0.5, 0.625 y 0.75, y las ordenadas por los valores de los coeficientes correspondientes  $EI_{eff1}/EI_g$ ,  $EI_{eff2}/EI_g$  y  $EI_{eff3}/EI_g$ , dados por las ecs (4.2) a la (4.4), respectivamente.

Siguiendo el proceso anterior, y conocido el valor de  $EI_{eff@ \eta Mmax}$ , se obtuvo la rigidez experimental correspondiente  $K_{m@ \eta}$  (kN/mm) mediante la expresión:

$$K_{m@ \eta} = \frac{3EI_{eff@ \eta Mmax}}{L^3} \quad (4.9)$$

El desplazamiento experimental de fluencia (mm) correspondiente,  $\Delta_{ym}$ , se define con la siguiente expresión:

$$\Delta_{ym} = \frac{V_{max}}{K_{m@ \eta}} \quad (4.10)$$

Esta rigidez y desplazamiento de fluencia experimentales se comparan posteriormente con los valores que se obtienen con expresiones propuestas en este estudio.

*Procedimiento de integración numérica de la cuadratura de Gauss-Lobatto*

Como se muestra en el Capítulo 5, para resolver algunas integrales necesarias en el cómputo de desplazamientos en las diferentes regiones que se consideran para una columna, se empleó el procedimiento de integración numérica de la cuadratura de Gauss-Lobatto, el cual se describe en lo que sigue. La integral de la función  $f(y)$ , se resuelve como:

$$\int_a^b f(y) dy \doteq m \sum_{i=1}^3 w_i f(c + mt_i) \quad (4.11)$$

donde

$$c = (a+b)/2 \quad (4.12)$$

$$m = (b-a)/2 \quad (4.13)$$

y

$$t_1 = -1 \quad w_1 = 1/3 \quad (4.14)$$

$$t_2 = 0 \quad w_2 = 4/3 \quad (4.15)$$

$$t_3 = 1 \quad w_3 = 1/3 \quad (4.16)$$



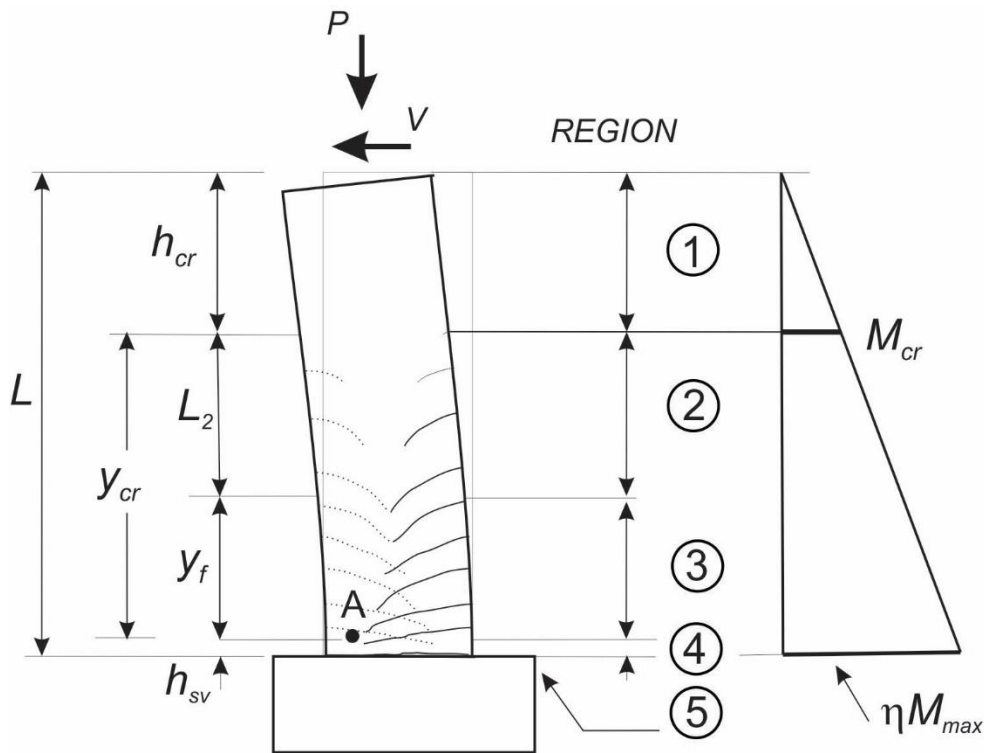
## 5. Modelo Empleado para Obtener El Desplazamiento Lateral de Fluencia de Una Columna Circular de Concreto Reforzado Sometida a Acciones del Tipo Sísmicas

### 5.1 Fuentes de Desplazamiento Lateral

La figura 5.1 muestra una columna en voladizo de concreto reforzado de altura  $L$ , sometida a la carga lateral  $V$  y carga axial en el centroide de la sección,  $P$ . Esta carga lateral es del tipo cíclica reversible. El parámetro  $\eta M_{max}$  es el momento actuante en la base de la columna, donde  $M_{max}$  es el momento flexionante resistente en la base, obtenido de la envolvente de resultados experimentales carga lateral-desplazamiento, figura 4.1. El factor  $\eta$  es un número menor que 1, cuyo valor se definió en un proceso de minimización de las diferencias entre los resultados del procedimiento de predicción de desplazamientos de fluencia en la columna, que se propone en este estudio, y los experimentales de la base de datos empleada, de los resultados de este proceso se obtuvo para  $\eta$  el valor  $2/3$ . El momento  $M_{max}$  incluye el momento dado por el efecto  $P-\Delta$  si éste existe, para lo cual las fuerzas aplicadas a los especímenes en los ensayos respectivos se corrigieron para que el modelo empleado sea el de una columna en voladizo tomando en cuenta el efecto  $P-\Delta$  como se muestra en la figura 4.1.

En este estudio se emplea la hipótesis de la existencia de cinco fuentes de desplazamientos laterales en una columna, donde éstas se definen en regiones respectivas de la columna identificadas con los números 1 a 5, figura 5.1, la que muestra también algunas dimensiones que caracterizan a estas regiones. El parámetro  $M_{cr}$ , momento de agrietamiento, se emplea para definir la Región 1.

La Región 1, con una longitud  $h_{cr}$ , figura 5.1 define la zona de columna sin agrietar. La Región 2 es una zona de transición entre la Región 1 y la Región 3. La Región 3 tiene una longitud  $y_f$ , figura 5.1, y se caracteriza por tener una distribución de agrietamiento con ángulo variable, es decir en forma de abanico. La Región 4 tiene una longitud  $\zeta x_c$ , y para ella se emplea la hipótesis de que las deformaciones son sólo por flexión. El parámetro  $\zeta$  se hizo variar entre 0.5 y 4 en un procedimiento de minimización de la diferencia entre la predicción de rigideces y las experimentales como se describe más adelante. La Región 5 toma en cuenta el efecto de deslizamiento por pérdida de adherencia en las barras de refuerzo longitudinal en la base de la columna, la que es causada por la penetración de deformaciones en tracción y compresión en estas barras en su cimentación. Como se puede inferir de las definiciones de las Regiones 2 y 3 que se desarrollan en este estudio, estas regiones contribuyen al desplazamiento lateral no sólo por flexión, sino también por cortante, por la acción de efectos acoplados de flexión y cortante que se obtiene del análisis de las grietas diagonales en las Regiones 2 y 3 como muestra este estudio.



**Figura 5.1** Columna sometida a cargas laterales cíclicas reversibles y regiones en que se divide

## 5.2 Región 1 (Restrepo y Rodriguez, 2020)

Esta región define la zona de columna sin agrietar cuando está sometida a cargas laterales, su longitud es  $h_{cr}$ , figura 5.1. Se acepta la hipótesis de que esta región tiene el comportamiento de un elemento a flexocompresión elástico, homogéneo e isotrópico, y que está sometida a momentos flexionantes menores que el momento de agrietamiento  $M_{cr}$ , el cual se valúa como:

$$M_{cr} = S_e \left( \frac{P}{A_t} + f_{cr} \right) \quad (5.1)$$

donde  $S_e$  es el módulo elástico de la sección transformada,  $A_t$  es el área de la sección transformada, y  $f_{cr}$  es el esfuerzo resistente a tracción del concreto, el cual en este estudio se supone que es función de la resistencia a compresión del concreto, y se considera igual a:

$$f_{cr} = 0.65 \sqrt{f'_c} \text{ (MPa)} \quad (5.2)$$

Además se supone que  $M_{cr}$  es igual a cero si  $\left( \frac{P}{A_t} + f_{cr} \right) \leq 0$ .

El parámetro  $\varepsilon_{cr}$  es la deformación del concreto en el primer agrietamiento, y se considera igual a:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{cr}}{E_c} \quad (5.3)$$

El desplazamiento lateral del extremo de la columna debido a la contribución a flexión y cortante de la Región 1,  $\Delta_1$ , se valúa como:

$$\Delta_1 = \Phi_{cr} \frac{h_{cr}^2}{3} \chi \quad (5.4)$$

donde el parámetro  $\Phi_{cr}$  es la curvatura de la sección en el inicio del agrietamiento, y  $h_{cr}$  está definido como:

$$h_{cr} = \frac{M_{cr} L}{\eta M_{max}} \quad (5.5)$$

y se debe cumplir que:

$$\eta M_{max} \geq M_{cr} \quad (5.6)$$

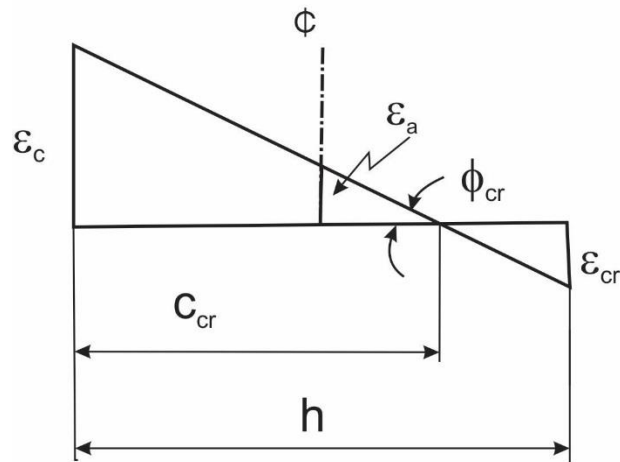
El parámetro  $\chi$  en la ec (5.4) es el factor de cortante definido en la ec 2.8, en la cual se debe emplear  $a_v = h_{cr}$ .

La Fig 5.2 muestra la distribución de deformaciones en la sección extrema inferior de la Región 1, cuando la fibra extrema de concreto en tracción alcanza el valor  $\varepsilon_{cr}$ . Esta figura también muestra la profundidad del eje neutro para este estado de deformaciones,  $c_{cr}$ , así como la curvatura correspondiente  $\Phi_{cr}$ . De acuerdo con la Fig 5.2,  $\Phi_{cr}$  se define como:

$$\Phi_{cr} = \frac{-\varepsilon_a + \varepsilon_{cr}}{h/2} \quad (5.7)$$

donde

$$\varepsilon_a = -\frac{P}{A_t E_c} \quad (5.8)$$





**Figura 5.2** Distribución de deformaciones en la sección extrema inferior de la Región 1

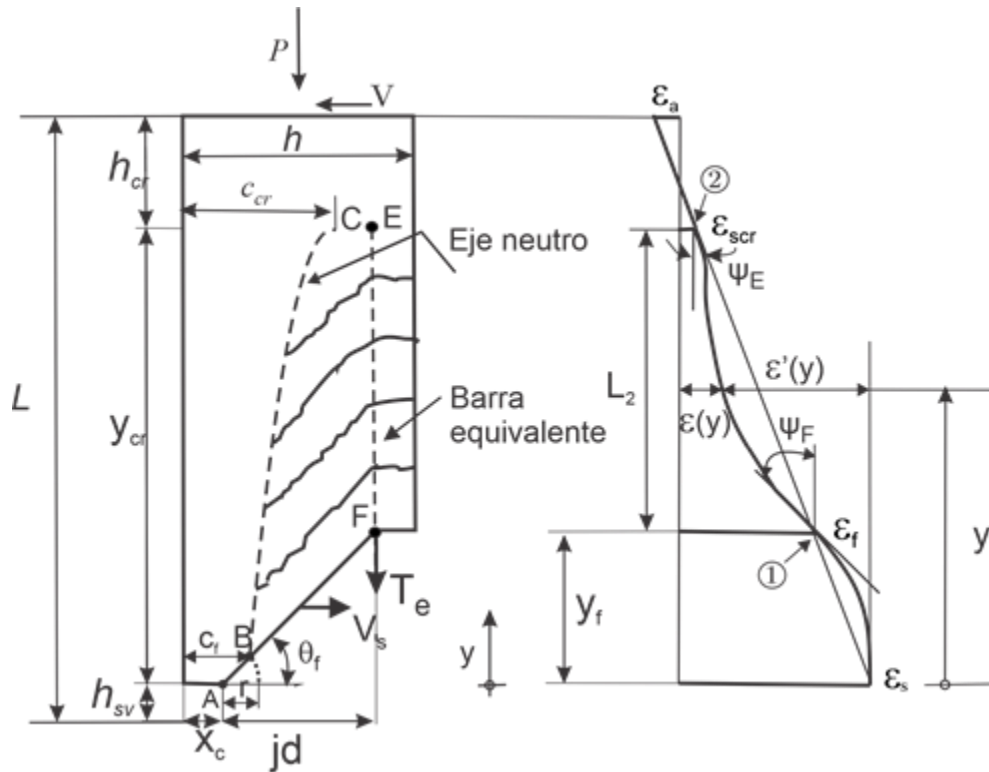
Para el cómputo del modulo de elasticidad del concreto,  $E_c$ , este estudio emplea el modelo de Carrasquillo et al. (1981).

De las ecs (5.7) y (5.8) se obtiene el valor de  $\Phi_{cr}$  a emplear en la ec (5.4) para el cómputo del desplazamiento  $\Delta_1$ .

$$\Phi_{cr} = \frac{\frac{P}{A_t E_c} + \varepsilon_{cr}}{h/2} \quad (5.9)$$

### 5.3 Región 2

Esta región es la transición entre la Región 1 y la región de esfuerzos de compresión y agrietamiento con ángulo de grietas variable, Región 3, la cual se describe en la sección 5.4, figura 5.1. La Región 2 existe sólo cuando  $y_{cr} > y_f$ , donde  $y_{cr}$  define la ubicación de la sección de columna donde actúa el momento  $M_{cr}$ , y  $y_f$  es la longitud de la Región 3, medida desde la distancia  $h_{sv}$  desde la base de la columna, figuras 5.1 y 5.3. La Región 2 tiene un comportamiento complejo, que está afectado por la resistencia a tracción del concreto (*tension stiffening*) y también por el traslado de tracción (*tension shifting*); sin embargo, se propone un modelo simplificado para el análisis de esta región, el cual se describe a continuación.



(a) Dimensiones (b) Deformaciones  
**Figura 5.3** Geometría y distribución de deformaciones en la Región 2

En la Región 2 se producen grietas inclinadas a lo largo de la longitud de esta región, y la profundidad del eje neutro varía desde un valor mínimo en la parte inferior de esta región,  $c_f$ , a un valor máximo en el extremo superior de la región, este último con el valor  $c_{cr}$ , figura 5.3. Como se aprecia en la figura 5.2,  $c_{cr}$  se puede definir como:

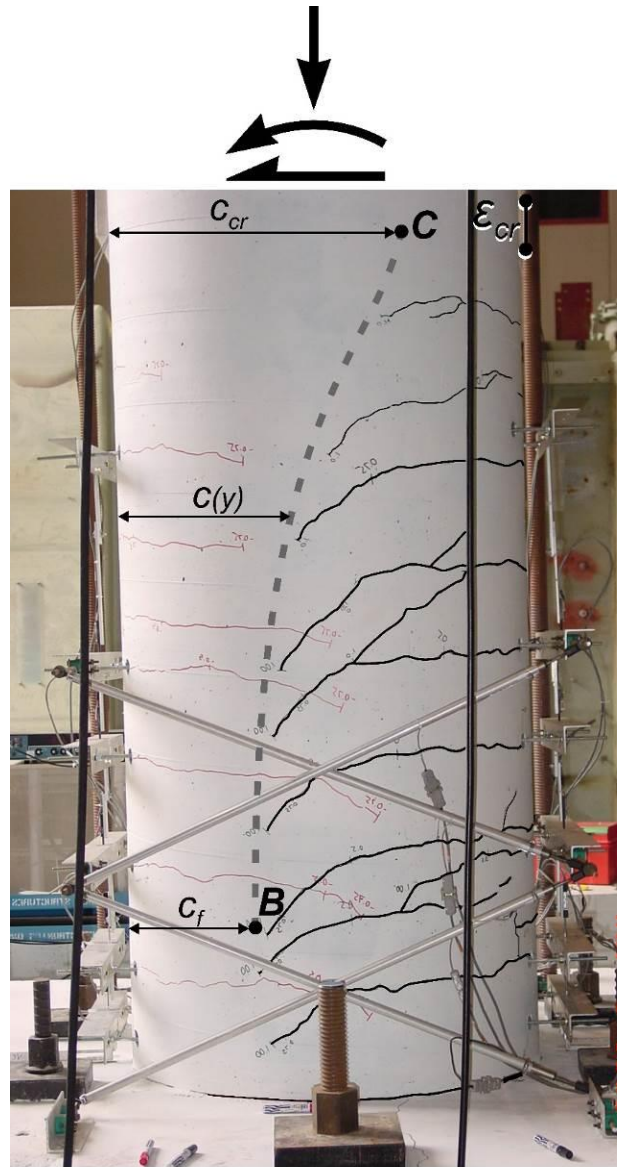
$$c_{cr} = h - \frac{\epsilon_{cr}}{\Phi_{cr}} \tag{5.10}$$

El parámetro  $c_f$  se define como (figura 5.3):

$$c_f = x_c + r \cos \theta_f \tag{5.11}$$

La figura 5.4 muestra una columna de concreto reforzado ensayada en laboratorio ante cargas laterales en la que se puede apreciar la distribución de las grietas inclinadas

mencionadas, así como la ubicación del eje neutro con la profundidad  $c$  en un punto cualquiera del eje, y las profundidades  $c_f$  y  $c_{cr}$  en sus extremos inferior y superior, respectivamente.



**Figura 5.4** Grietas inclinadas en una columna ensayada ante cargas laterales (Stephan et al., 2003)

### Hipótesis empleadas para el análisis de desplazamiento lateral debido a la Región 2

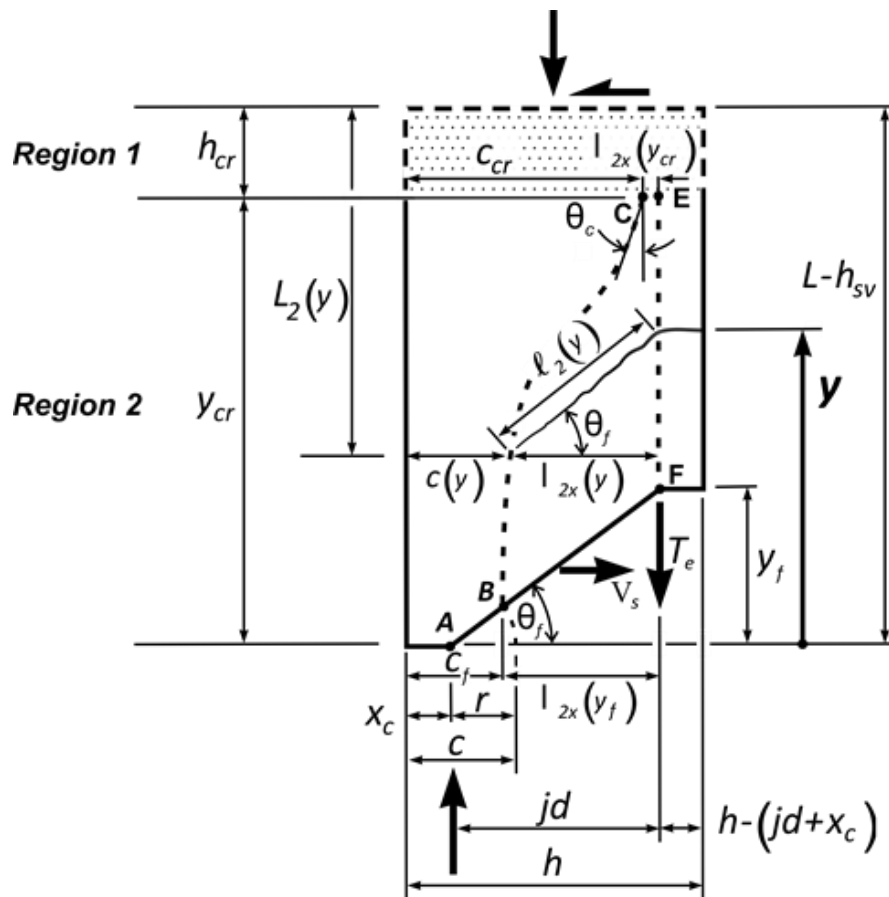
La contribución al desplazamiento lateral de la columna debido a la Región 2 se basa en tres hipótesis principales:

- a) El ángulo de las grietas inclinadas se considera constante é igual a  $\theta_f$ , donde  $\theta_f$  es el ángulo de la grieta con mayor pendiente en la Región 3, Figs 5.1 y 5.3.
- b) Se supone que las deformaciones en tracción en la barra equivalente la columna tiene una variación no lineal en la longitud de la Región 2,  $L_2$ , distancia entre los puntos E y F, Figura 5.3. En esta región de transición, estas deformaciones varían desde el valor  $\varepsilon_f$  en la barra equivalente en tracción cuando intersecta en el punto F a la primera grieta inferior de la Región 2, al valor de la deformación  $\varepsilon_{scr}$  de esta barra en el extremo superior de la región, en el punto E, Fig 5.3b. Como se describe más adelante,  $\varepsilon_f$  es la deformación en tracción en la barra de refuerzo equivalente donde atraviesa la mencionada grieta inferior, cuando la deformación de esta barra en la Región 4 alcanza el valor  $\varepsilon_s$ , Fig 5.3b. En el análisis de deformaciones en la barra de refuerzo equivalente, debido a la fuerza  $T_e$ , se considera que las pendientes de las tangentes a la curva de estas deformaciones en los puntos  $y = y_f$  y  $y = y_{cr}$  son iguales a  $\tan \Psi_F$  y  $\tan \Psi_E$ , respectivamente, Fig 5.3b.
- c) Cada grieta de la Región 2 inicia en el eje neutro de cada sección, en un eje que sigue la forma de una curva no lineal, Fig 5.3a y Fig 5.4. Este eje define la posición del eje neutro en la Región 2. El extremo inferior de este eje es el punto B, y en este punto el eje es tangente al eje longitudinal de la columna, con una profundidad del eje neutro igual a  $c_f$ , ubicado en la grieta con mayor pendiente en la Región 3, y además ubicado en una circunferencia de radio  $r$ , la cual define una zona rígida en la Región 3 como se describe más adelante, Fig 5.3a. El centro de esta circunferencia es también el centro de rotación de la grieta con mayor pendiente mencionada, ver punto A en la Fig 5.3a. El extremo superior del eje de inicio de grietas en la Región 2, se ubica en el punto C en la Fig 5.3a, en el eje neutro en la sección extrema superior de esta región, con una profundidad igual a  $c_{cr}$  respecto a la fibra extrema en

compresión. El ángulo entre la tangente a este eje en el punto C y la dirección longitudinal de la columna,  $\theta_1$ , tiene el valor que le corresponde cuando el momento en la sección es igual a  $M_{cr}$ .

### Parámetros geométricos empleados

Se considera un sistema de coordenadas donde el eje  $y$  de ordenadas tiene su origen en el extremo inferior de la Región 2, y el eje  $x$  es horizontal. Para una sección de columna con la ordenada  $y$ , Fig 5.5, la hipótesis (a) permite calcular el ángulo del puntal inclinado para esta ordenada,  $\theta(y)$ , lo que lleva a  $\theta(y) = \theta_f$ .



**Figura 5.5** Detalles de la Región 2

De la figura 5.5 el parámetro  $y_{cr}$  se define como:

$$y_{cr} = L - (h_{sv} + h_{cr}) \geq y_f \quad (5.12)$$

donde  $h_{sv}$  es la altura de la región de curvatura constante, Región 4, y se define como:

$$h_{sv} = \min(\xi x_c, L - h_{cr}) \geq 0 \quad (5.13)$$

Además, de la inspección de la figura 5.5:

$$\cos \theta_f = \frac{jd}{\sqrt{(jd)^2 + y_f^2}} \quad (5.14)$$

El parámetro  $r$  en la figura 5.5, que define la zona rígida de la Región 3, se define como

$$r = c - x_c \quad (5.15)$$

La figura 5.5 muestra una grieta en la Región 2 (con línea gruesa) que intersecta la barra de refuerzo equivalente en la ordenada  $y$ , con un ángulo  $\theta(y) = \theta_f$ . La longitud de esta grieta es igual a  $l_2(y)$ , y su componente horizontal es  $l_{2x}(y)$ , figura 5.5. En lo que sigue se evalúan estos parámetros.

Para  $y = y_f$ , la longitud  $l_{2x}(y)$  se define como, Fig 5.5:

$$l_{2x}(y_f) = jd - r \cos(\theta_f) \quad (5.16)$$

Para  $y = y_{cr}$ , la longitud  $l_{2x}(y)$  se define como, Fig 5.5:

$$l_{2x}(y_{cr}) = jd + x_c - c_{cr} \quad (5.17)$$

Considerando la hipótesis (c), en el Apéndice B se desarrolla una expresión que se emplea en el cómputo del valor de la componente horizontal de la longitud de grieta,  $l_{2x}(y)$ , en función de la profundidad del eje neutro  $c(y)$ . En este desarrollo se emplean los valores de frontera  $c(c_f) = c_f$  y  $c(y_{cr}) = c_{cr}$ . Además, se emplea las condiciones  $\frac{dc(y)}{dy} = \tan \theta_c$  para  $y =$

$y_{cr}$ , y  $\frac{dc(y)}{dy} = 0$  para  $y = y_f$ . La expresión que se propone para la longitud  $l_{2x}(y)$ , Figura 5.5

es:

$$l_{2x}(y) = jd + x_c - c(y) \quad (5.18)$$

donde la expresión para  $c(y)$  se desarrolla en el Apéndice B y es igual a:

$$c(y) = c_f + (c_{cr} - c_f) \frac{z^2}{1 - \kappa_I z + \kappa_I z^2} \quad (5.19)$$

En la ec (5.19) el parámetro adimensional  $z$  es igual a:

$$z = \frac{y - y_f}{y_{cr} - y_f} \quad (5.20)$$

y el parámetro  $\kappa_I$  se define como:

$$\kappa_I = 2 - \frac{y_{cr} - y_f}{c_{cr} - c_f} \tan \theta_c \quad (5.21)$$

donde de la definición de  $\theta_c$  se obtiene (Apéndice B):

$$\tan \theta_c = \frac{P r_t^2}{V_{\eta M_{max}} h_{cr}^2} \quad (5.22)$$

En la ec (5.22)  $r_t^2$  y  $V_{\eta M_{max}}$  se definen como:

$$r_t^2 = \frac{I_t}{A_t} \quad (5.23)$$

$$V_{\eta M_{max}} = \frac{\eta M_{max}}{L} \quad (5.24)$$

Finalmente, el parámetro  $l_2(y)$  se define como, ver Fig 5.5:

$$l_2(y) = \frac{l_{2x}(y)}{\cos \theta_f} \quad (5.25)$$

### Análisis de deformaciones en la barra de refuerzo longitudinal equivalente sometida a la fuerza $T_e$

En el análisis de deformaciones en la barra de refuerzo equivalente sometida a la fuerza  $T_e$  es necesario conocer las tangentes de los ángulos de las pendientes a la curva de deformaciones en  $y = y_f$  y  $y = y_{cr}$ ,  $\tan \psi_F$  y  $\tan \psi_E$ , respectivamente, Fig 5.3b.

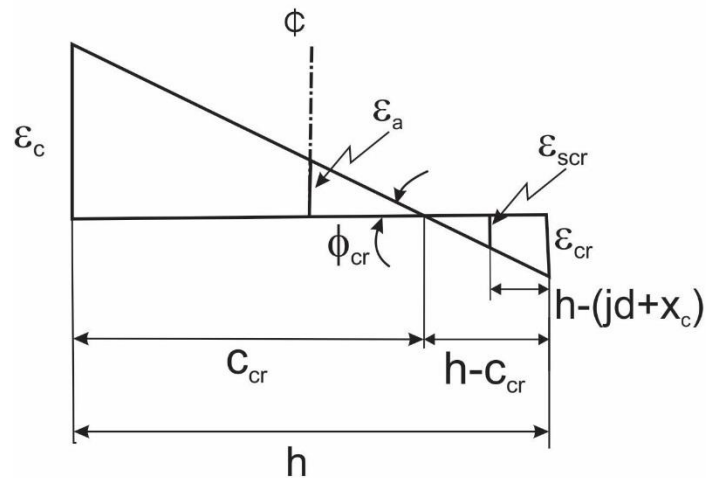
*Pendiente ( $\tan \psi_E$ ) en el intervalo de  $y$  entre las ordenadas  $y = y_{cr}$  y  $y = y_{cr} + h_{cr}$*

Se calcula la pendiente ( $\tan \psi_E$ ) del perfil de deformaciones entre las ordenadas  $y = y_{cr}$  y  $y = y_{cr} + h_{cr}$ , ver figura 5.3b. De la figura 5.3b:

$$\tan \psi_E = - \left( \frac{|\varepsilon_a| + \varepsilon_{scr}}{h_{cr}} \right) \quad (5.26)$$

donde  $\varepsilon_a$  se obtiene de la ec (5.8) y  $\varepsilon_{scr}$  se define en lo que sigue.

La figura 5.6 muestra la distribución de deformaciones en la sección extrema inferior de la Región 1, cuando la fibra extrema de concreto en tracción alcanza el valor  $\varepsilon_{cr}$ , y la deformación en la barra equivalente en tracción es  $\varepsilon_{scr}$ , ubicada a la distancia  $h - (jd + x_c)$  de la fibra extrema de concreto en tracción.



**Figura 5.6** Distribución de deformaciones en la sección extrema inferior de la Región 1



De triángulos semejantes en la Fig 5.6 se obtiene:

$$\varepsilon_{scr} = \left( \frac{jd + x_c - c_{cr}}{h - c_{cr}} \right) \varepsilon_{cr} \quad (5.27)$$

*Pendiente (tan  $\psi_F$ ) en  $y = y_f$*

De las ec (5.67) y (5.68), y considerando  $T_e = \varepsilon_s E_s A_{st}$ , se obtiene:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_s \left[ 1 - \frac{I}{T_e} \int_0^y f(y) dy \right] \quad (5.28)$$

donde  $f(y)$  está definido por la ec (5.69). Tomando la derivada en la ec (5.28),

$$\frac{d\varepsilon(y)}{dy} = -\frac{\varepsilon_s}{T_e} \frac{d}{dy} \int_0^y f(y) dy$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo en la expresión anterior y empleando la ec. (5.69) se obtiene

$$\frac{d\varepsilon(y)}{dy} = -\frac{\varepsilon_s}{T_e} f(y) = -\frac{\varepsilon_s}{T_e} \frac{v_{el} A_{ht}}{jd s} y f_{st}(y) \quad (5.29)$$

El valor de  $\tan \psi_F$  es igual a:

$$\tan \psi_F = \left. \frac{d\varepsilon(y)}{dy} \right|_{y=y_f} = -\frac{\varepsilon_s}{T_e} \frac{v_{el} A_{ht} f_{st}(y_f)}{s} \frac{y_f}{jd} \quad (5.30)$$

### *Análisis de deformaciones*

Empleando el procedimiento de interpolación propuesto por Crisafulli (1997), y descrito en el Apéndice A, el cual toma en cuenta las pendientes de la curva de deformaciones en los puntos 1 y 2, ver Fig 5.3, es posible expresar la deformación  $\varepsilon'(y)$ , Fig 5.3, como:

$$\varepsilon'(y) = (\varepsilon_s - \varepsilon_f) + (\varepsilon_f - \varepsilon_{scr}) \frac{\kappa_2 z + z^2}{1 + (\kappa_2 - \kappa_3) z + \kappa_3 z^2} \quad (5.31)$$

De la definición de  $\varepsilon(y)$ , ver Fig 5.3, y de la ec (5.31) se obtiene

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_s - \varepsilon'(y) = \varepsilon_f - (\varepsilon_f - \varepsilon_{scr}) \frac{\kappa_2 z + z^2}{1 + (\kappa_2 - \kappa_3)z + \kappa_3 z^2} \quad (5.32)$$

donde la variable  $z$  está definida en la ec. (5.20), y

$$\kappa_2 = \frac{y_{cr} - y_f}{\varepsilon_{scr} - \varepsilon_s} \tan \psi_F \quad (5.33)$$

$$\kappa_3 = 2 - \frac{y_{cr} - y_f}{\varepsilon_{scr} - \varepsilon_f} (1 + \kappa_2) \tan \psi_E \quad (5.34)$$

El parámetro  $\tan \psi_E$  en la ec (5.34) está dado por la ec. (5.26). El parámetro  $\tan \psi_F$  en la ec. (5.33) está dado por la ec (5.30).

El modelo empleado en este trabajo para la Región 2 es diferente al empleado en Restrepo y Rodriguez (2020), en el cual se consideró que  $\tan \psi_F$  tenía el mismo valor en columnas rectangulares y circulares, lo que cambió en este trabajo. Además, como se muestra en la definición de la Región 3, la expresión para definir las deformaciones en la barra equivalente en esta zona cambió respecto al modelo de Restrepo y Rodriguez (2020), y por tanto cambió también el valor de  $\varepsilon_f$ , deformación en la barra equivalente que corresponde al extremo inferior de la Región 2 y al extremo superior de la Región 3, Fig 5.3b.

### **Contribución de la Región 2 al desplazamiento lateral de la columna**

El diferencial de rotación de un puntal inclinado con un ángulo  $\theta(y) = \theta_f$ ,  $d\theta_f$ , se calcula considerando la Fig 5.7, la ec (5.25), y el diferencial de alargamiento de la barra equivalente,  $\varepsilon(y) dy$ , lo que lleva a:

$$d\theta_f = \left[ \frac{\varepsilon(y) dy}{\cos \theta_f} \right] \frac{1}{l_2(y)} = \frac{\varepsilon(y)}{l_{2x}(y)} dy \quad (5.35)$$

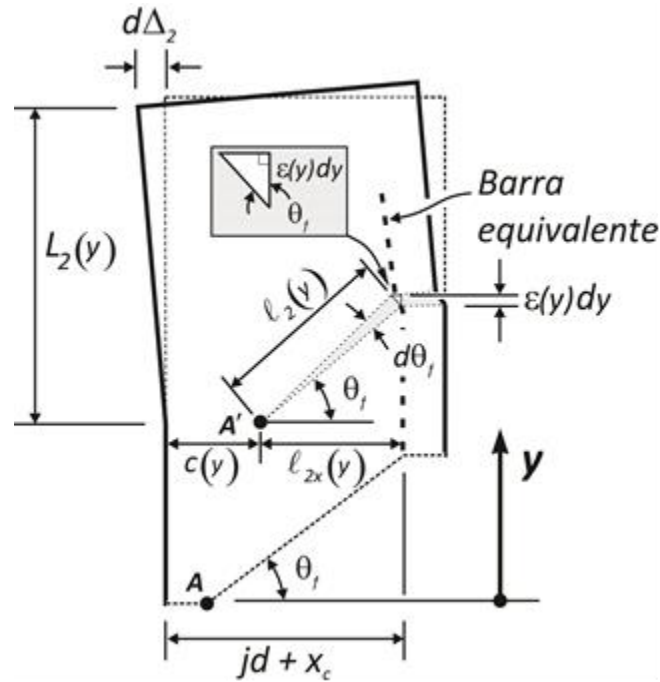


Figura 5.7 Detalles geométricos de la grieta en la ordenada  $y$  de la Región 2

La contribución de  $d\theta_f$  en la Región 2 al desplazamiento lateral de la columna,  $d\Delta_2$ , ver Fig 5.7, se calcula como:

$$d\Delta_2 = L_2(y) d\theta_f \quad (5.36)$$

donde la longitud  $L_2(y)$  se define considerando las Figs. 5.1 y 5.5, lo que lleva a:

$$L_2(y) = L - h_{sv} - y + l_{2x}(y) \tan\theta_f \quad (5.37)$$

Se puede comprobar que la longitud  $L_2(y)$  cumple con las condiciones de frontera en  $y = y_f$  y  $y = y_{cr}$ .

Combinado las ecs (5.35) y (5.36) se obtiene:

$$A_2 = \int_{y_f}^{y_{cr}} L_2(y) \frac{\varepsilon(y)}{l_{2x}(y)} dy = \int_{y_f}^{y_{cr}} f(y) dy \quad (5.38)$$

*Solución de la ec. 5.38*

Se puede encontrar una aproximación razonable a la solución de la ec (5.38) usando el método de integración de tres puntos de Gauss-Lobatto, explicado en el Capítulo 4, lo que lleva a:

$$\Delta_2 = \frac{I}{6} (y_{cr} - y_f) (T_1 + 4T_2 + T_3) \quad (5.39)$$

donde

$$T_1 = \left[ L - h_{sv} - y_f + l_{2x}(y_f) \tan \theta_f \right] \frac{\varepsilon_f}{l_{2x}(y_f)} \quad (5.40)$$

$$T_2 = \left[ L - h_{sv} - 0.5y_f - 0.5y_{cr} + l_{2x}(0.5y_f + 0.5y_{cr}) \tan \theta_f \right] \frac{\left[ \varepsilon_f - (\varepsilon_f - \varepsilon_{scr}) \frac{0.5\kappa_2 + 0.25}{1 + 0.5(\kappa_2 - \kappa_3) + 0.25\kappa_3} \right]}{l_{2x}(0.5y_f + 0.5y_{cr})} \quad (5.41)$$

En la ec (5.41) el parámetro  $l_{2x}(0.5y_f + 0.5y_{cr})$  se obtiene de la ec (5.18), lo que se lleva a:

$$l_{2x}(0.5y_f + 0.5y_{cr}) = jd + x_c - c(0.5y_f + 0.5y_{cr}) \quad (5.42)$$

El parámetro  $c(0.5y_f + 0.5y_{cr})$  se obtiene de las ecs (5.19) y (5.20). Reemplazando  $y = 0.5y_f + 0.5y_{cr}$  en la ec (5.20) se obtiene  $z = 0.5$ , valor que reemplazado en la ec (5.19)

lleva a:

$$c(0.5y_f + 0.5y_{cr}) = c_f + (c_{cr} - c_f) \frac{0.25}{1 - 0.25k_I} \quad (5.43)$$

El parámetro  $T_3$  de la ec (5.39) es igual a:

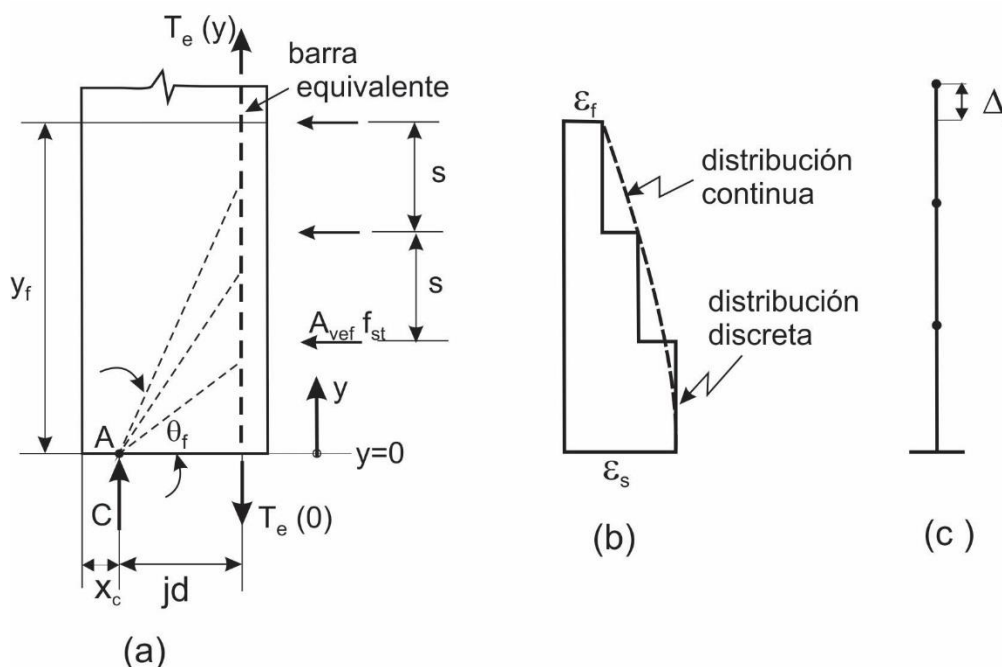
$$\begin{aligned} T_3 &= f(c_o + mt_3) = f\left[0.5(y_f + y_{cr}) + 0.5(y_{cr} - y_f)(I)\right] = f(y_{cr}) = \\ &= \left[ L - h_{sv} - y_{cr} + l_{2x}(y_{cr}) \tan \theta_f \right] \frac{\varepsilon_{scr}}{l_{2x}(y_{cr})} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Las ecs (5.39) a (5.44) son válidas para columnas rectangulares y circulares; sin embargo, se debe considerar que en el cómputo de las constantes  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$  interviene  $\tan\psi_F$ , parámetro definido para columnas circulares en la ec. (5.30), la cual no es aplicable al caso de columnas rectangulares.

## 5.4 Región 3

La Región 3 se caracteriza por contar con una distribución de esfuerzos en compresión en el concreto y de agrietamiento en forma de abanico, la parte de columna que forma esta región tiene una longitud igual a  $y_f$ , Fig 5.8. La primera grieta en la parte inferior de la Región 3 es horizontal, y las siguientes grietas van aumentando de pendiente hasta llegar a la grieta con mayor pendiente en esta región, la que forma un ángulo igual a  $\theta_f$  respecto a la horizontal, Figura 5.8a. La distribución de deformaciones en tracción de la barra de refuerzo equivalente a lo largo de la Región 3 sigue una distribución discreta, ver línea continua en la Fig 5.8(b). La deformación de esta barra de refuerzo en el extremo superior de la región se supone igual a  $\varepsilon_f$ , la cual se calcula en esta parte del trabajo, y la deformación de esta barra de refuerzo en el extremo inferior de la región se supone igual a la deformación que alcanza en la Región 4,  $\varepsilon_s$ , Fig 5.8(b). El valor de la deformación  $\varepsilon_s$  se define en el análisis de la Región 4 más adelante. Como se describe en dicho análisis, para el valor del momento en la base  $\eta M_{max}$ , la barra de refuerzo equivalente en tracción en el extremo inferior de la Región 3 podría alcanzar la fluencia o una deformación menor que  $\varepsilon_y$ .

El modelo empleado en este trabajo para la Región 3 es significativamente diferente al empleado en Restrepo y Rodriguez (2020), ya que para definir el valor de la fuerza en tracción de la barra equivalente en la ordenada  $y$ ,  $T(y)$ , estos autores consideraron un valor constante del esfuerzo en el refuerzo transversal en la Región 3. En este estudio, como se muestra más adelante, se considera la hipótesis que este esfuerzo tiene variación lineal, empezando con un valor igual a cero en el extremo inferior de la zona deformable de la Región 3.

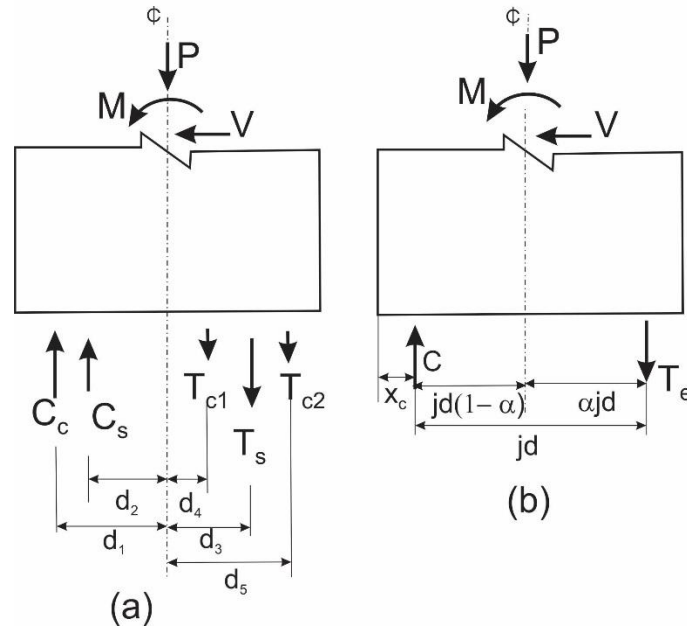


**Figura 5.8** Características de agrietamiento y de deformaciones en la Región 3.

### Resistencia a flexocompresión de una sección de concreto considerando la contribución del concreto a tracción

La Fig 5.9a muestra una sección de columna que resiste el momento  $M$ , la carga axial  $P$  y el cortante  $V$ . En esta Figura se identifican diversas fuerzas internas que equilibran a las acciones mencionadas, como son la fuerza de tracción del acero de refuerzo  $T_s$ , las fuerzas de compresión del concreto y acero de refuerzo,  $C_c$  y  $C_s$ , respectivamente, así como las fuerzas de tracción del concreto,  $T_{c1}$  y  $T_{c2}$ , a la izquierda y derecha de la ubicación de  $T_s$ , respectivamente. La ubicación de estas fuerzas queda definida por las distancias  $d_1$  a  $d_5$ , Fig 5.9a. Las fuerzas resistentes mostradas en la Fig 5.9a, como las de la Fig 5.9b, que se describen en lo que sigue, se pueden obtener empleando el programa de análisis momento-curvatura *RECT-2013* y *CIRC-2013* (Torres et al, 2013), para columnas rectangulares y circulares, respectivamente. Este programa fue originalmente desarrollado para el caso sin tracción en el concreto por Presland y Restrepo (2001). En este programa las distancias  $d_1$  a

$d_5$  tienen la nomenclatura  $x_{ic}$ ,  $x_{iCs}$ ,  $x_{iT}$ ,  $x_{iTc1}$ , y  $x_{iTc2}$ , respectivamente. El programa mencionado modela el concreto confinado con el modelo propuesto por Mander et al. (1988).



**Figura 5.9** Fuerzas internas en una sección de columna que resisten el momento  $M$ , la carga axial  $P$  y el cortante  $V$ . (a) Sección con todas las fuerzas, (b) Sección con las fuerzas resultantes  $C$  y  $T_e$

La figura 5.9b muestra las fuerzas internas que resultan de la suma vectorial de las fuerzas en compresión  $C_c$  y  $C_s$ , la que es igual a la fuerza  $C$ . Además, se considera la suma vectorial de las fuerzas  $T_s$ ,  $T_{c1}$  y  $T_{c2}$ , la que es igual a la fuerza en tracción en la barra equivalente,  $T_e$ , ver Fig 5.9b. El objeto de trabajar con las fuerzas resultantes en compresión,  $C$ , y tracción,  $T_e$ , mostradas en la Fig 5.9b es el simplificar el estudio paramétrico del valor requerido del momento resistente en la base de la columna  $M = \frac{2}{3}M_{max}$ , y de los parámetros correspondientes, estudio que se describe más adelante. Si se toma momentos respecto al punto de aplicación de la fuerza de compresión  $C$ , Fig 5.9b, se obtiene:



$$M = M_{s@2/3Mmax} + M_{c@2/3Mmax} \quad (5.45)$$

donde

$$M_{s@2/3Mmax} = T_e j d \quad (5.46)$$

$$M_{c@2/3Mmax} = P \left( \frac{h}{2} - x_c \right) \quad (5.47)$$

Es de utilidad expresar la ec (5.45) en términos de fuerzas cortantes como:

$$V = V_4 + V_p \quad (5.48)$$

donde

$$V = \frac{2}{3} V_{max} = \frac{M}{L} \quad (5.49)$$

$$V_4 = \frac{M_{s@2/3Mmax}}{L} \quad (5.50)$$

$$V_p = \frac{P \left( \frac{h}{2} - x_c \right)}{L} \quad (5.51)$$

El cortante  $V_p$  resulta de la contribución de la carga axial  $P$  para resistir el cortante en la sección crítica. El cortante  $V_4$  es el cortante actuante en la Región 4 que debe ser resistido por el refuerzo transversal en la Región 3, como se muestra más adelante. Despejando  $V_4$  de la ec (5.48) y combinando con las ecs (5.49) y (5.51) se tiene:

$$V_4 = \frac{2}{3} V_{max} - \frac{P \left( \frac{h}{2} - x_c \right)}{L} \quad (5.52)$$

Posteriormente se requerirá contar con una expresión para  $T_e$ , la que se obtiene despejando  $T_e$  de la ec. (5.46) y combinando con las ecs (5.50) y (5.52):

$$T_e = \frac{\frac{2}{3}V_{max}L - P\left(\frac{h}{2} - x_c\right)}{jd} \quad (5.53)$$

La solución de  $M$  en la ec (5.45), considerando las fuerzas mostradas en la Fig 5.9a, se llevó a cabo con el empleo del programa de análisis momento-curvatura RECT-2013 y CIRC-2013 (Torres et al, 2013). Para cada punto de la curva momento-curvatura, el programa también da los valores de los parámetros  $x_c$ ,  $jd$  y  $T_e$ , necesarios para la solución de las ecs (5.46) y (5.47). El desarrollo del modelo analítico empleado para el cómputo de los valores y ubicación de las fuerzas en tracción en el concreto  $T_{c1}$  y  $T_{c2}$  se muestra en el Apéndice B de Restrepo y Rodriguez (2020). En este modelo, para definir la curva esfuerzo-deformación en tracción del concreto,  $f_c$ - $\varepsilon$ , se empleó una solución simplificada de la expresión para esta curva propuesta por Fields y Bischoff (2004). La expresión propuesta en este trabajo para esta curva es:

para  $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{cr}$ :

$$\frac{f_c}{f_{cr}} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cr}} \quad (5.54)$$

para  $\varepsilon_c \geq \varepsilon_{cr}$ :

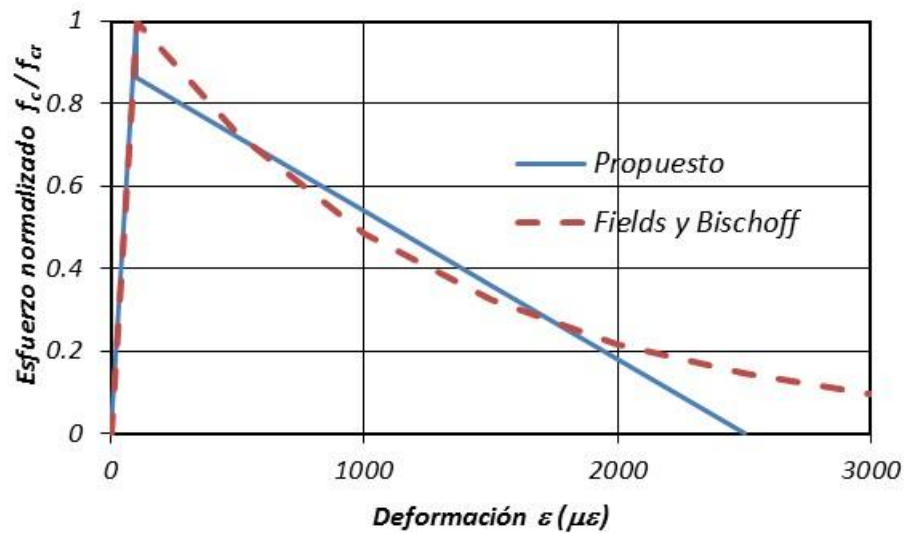
$$\frac{f_c}{f_{cr}} = 0.9 \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cto}} \right) \quad (5.55)$$

donde  $\varepsilon_{cto}$  en este trabajo se considera igual a  $2500 \mu\varepsilon$

La curva propuesta por Fields y Bischoff (2004) para  $\varepsilon_c \geq \varepsilon_{cr}$  es:

$$\frac{f_c}{f_{cr}} = e^{-0.8(\varepsilon_c - \varepsilon_{cr}) \times 10^3} \quad (5.56)$$

La Fig 5.10 permite comparar los resultados de las expresiones para la curva  $f_c$ - $\varepsilon$  en tracción propuesta en este trabajo y la de Fields y Bischoff (2004). Se puede apreciar que la expresión propuesta es una simplificación razonable de la expresión propuesta por Fields y Bischoff (2004).



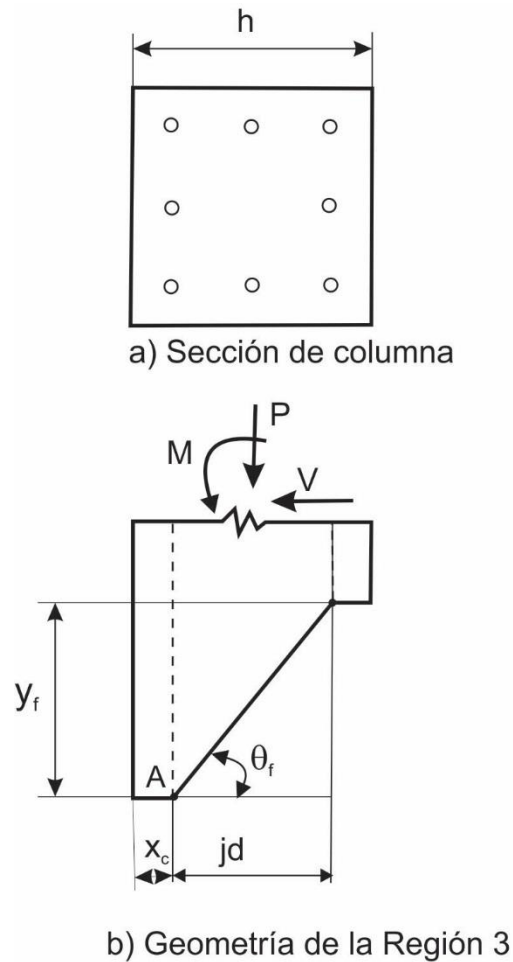
**Figura 5.10** Curvas esfuerzo-deformación en tracción en el concreto, propuesta y la de Fields y Bischoff (2004)

### Características de la Región 3

La figura 5.11 muestra la geometría de la Región 3 para la última grieta en esta Región, la que forma el ángulo  $\theta_f$  con la horizontal. Se define el ángulo  $\theta_f$ , Figs 5.8 y 5.11, como:

$$\theta_f = \arctan \frac{y_f}{jd} \quad (5.57)$$

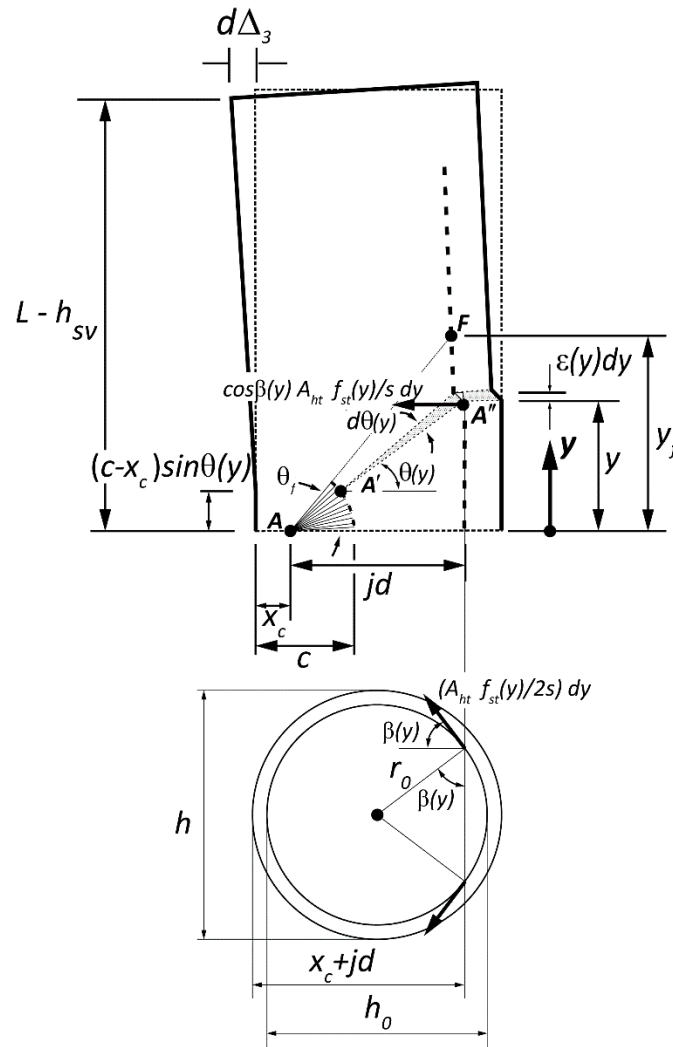
El parámetro  $y_f$ , ver figura 5.11, se puede conocer con base en que en la zona definida por este parámetro, el refuerzo transversal debe resistir la fuerza cortante actuante  $V_4$ . Para ello es necesario postular una distribución de deformaciones en este refuerzo, la cual es variable a lo largo de  $y_f$ . En columnas circulares es necesario considerar la variación de este esfuerzo en una sección transversal de estas columnas, como se muestra posteriormente.



**Figura 5.11** Características geométricas de la Región 3.

### **Análisis del área efectiva del refuerzo transversal en columnas circulares**

La elevación de la columna circular en la Fig 5.12a muestra la Región 3 y el puntal en compresión con un ángulo igual a  $\theta_f$  respecto a la horizontal. La Figura 5.12b muestra la sección transversal de la columna en el punto A'', con ordenada  $y$ , donde  $h$  es el diámetro de la columna, y  $h_o$  es el diámetro de la circunferencia que forma el refuerzo transversal a centros de este refuerzo, con un radio  $r_o$  igual a  $0.5h_o$ .



**Figura 5.12** Fuerzas efectivas que resisten el cortante en una sección circular, (a) Elevación, (b) Sección transversal

El diagrama de cuerpo libre del refuerzo transversal en la porción de columna mostrada en la Fig 5.12b indica que en el punto A'', a cada lado de la sección transversal, el refuerzo transversal en la longitud  $dy$ , en la dirección tangencial a la circunferencia de diámetro  $h_o$  (radio  $r_o$ ) contribuye con la fuerza  $[A_{ht} f_{st}(y)/2s] dy$ , donde  $A_{ht}$  es el área total del refuerzo transversal en la sección (por ejemplo en el caso de un solo anillo de refuerzo  $A_{ht}$  sería dos veces el área de la barra que forma este refuerzo). El parámetro  $s$  es la separación

de este refuerzo, y  $f_{st}(y)$  es el valor del esfuerzo en tracción del refuerzo transversal en la ordenada  $y$ . El diferencial de fuerza  $dF_v(y)/2$  es la componente horizontal de la fuerza tangencial mencionada, Fig 5.12b, y es igual a:

$$\frac{1}{2}dF_v(y) = [v_{eI} A_{ht} f_{st}(y) / 2s] dy \quad (5.58)$$

donde  $v_{eI}$  es el factor de área efectiva del refuerzo transversal en la ordenada  $y$  de la Región

3. Este parámetro se obtiene de la Fig 5.12b y es igual a:

$$v_{eI} = \cos \beta(y) \quad (5.59)$$

De la Fig 5.12b se obtiene la siguiente relación geométrica:

$$r_o^2 = (r_o \cos \beta(y))^2 + (x_c + jd - 0.5h)^2 \quad (5.60)$$

De las ecs (5.59) y (5.60) se obtiene

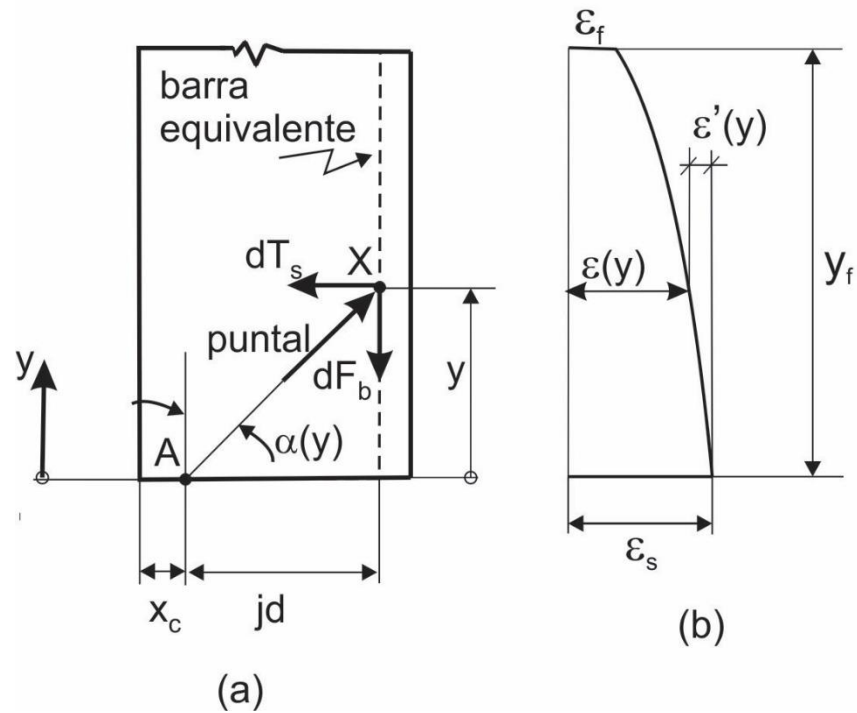
$$v_{eI} = \left[ 1 - \left( \frac{x_c + jd - 0.5h}{0.5h_o} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.61)$$

En columnas rectangulares el valor de  $v_{eI}$  es 1.

### **Análisis de deformaciones y fuerzas axiales en la barra equivalente en la Región 3**

La Fig 5.8b muestra con línea gruesa una distribución discreta de deformaciones en la barra equivalente en tracción. Esta distribución de deformaciones varía desde el valor  $\varepsilon_s$  en la parte inferior de la región, al valor  $\varepsilon_f$  en el extremo superior. Para el cálculo de la contribución de la Región 3 al desplazamiento lateral de la columna se postula la hipótesis de que la distribución de los puntales en compresión en abanico de esta región es continua, y que la distribución de deformaciones también es continua.

La Fig 5.13a muestra la fuerza en el puntal en compresión que actúa en el punto X de la Región 3, cuya ordenada es  $y$ . Esta fuerza actúa en una longitud diferencial de barra  $dy$ , formando el ángulo  $\alpha(y)$  con el eje longitudinal de la columna.



**Figura 5.13** Puntal en el concreto y variación de deformaciones en la barra en tracción en la Región 3. (a) Fuerzas en el punto X, (b) Deformaciones

La figura 5.13b muestra la variación continua de deformaciones en la barra. En la Fig 5.13a se puede apreciar que la fuerza en el puntal es resistida por las diferenciales de la fuerza en el refuerzo transversal,  $dT_s$ , y de la fuerza de adherencia  $dF_b$ . Estas fuerzas diferenciales se definen como:

$$dT_s = \frac{v_e l A_{ht} f_{st}(y)}{s} dy \quad (5.62)$$

$$dF_b = \cot \alpha(y) dT_s \quad (5.63)$$

donde de acuerdo con la Fig 5.13a:

$$\cot \alpha(y) = \frac{y}{jd} \quad (5.64)$$

De las ecs (5.62) a la (5.64) se obtiene:

$$dF_b = \frac{y v_{e1} A_{ht} f_{st}(y)}{j d s} dy \quad (5.65)$$

Para el momento  $\eta M_{max}$  se admite la hipótesis que el refuerzo transversal no fluye, es decir no se conoce el valor del esfuerzo  $f_{st}(y)$ . Se admite la hipótesis de este refuerzo tiene una variación lineal, empezando en cero para  $y=0$ , e igual a  $f_{st}(y_f)$  para  $y=y_f$ , es decir,

$$f_{st}(y) = \frac{y}{y_f} f_{st}(y_f) \quad (5.66)$$

La fuerza en tracción de la barra equivalente en el punto A en la Fig. 5.13,  $T(y)$ , es igual a la diferencia entre la tracción  $T_e$  que actúa en la interfase de las Regiones 3 y 4, y la integral de la fuerza de adherencia  $dF_b$ . Esto lleva a:

$$T(y) = T_e - \int_0^y dF_b \quad (5.67)$$

*Expresiones a emplear en la Región 3 de columnas circulares*

El empleo de la ec (5.67) requiere resolver la siguiente integral

$$\int_0^y dF_b = \int_0^y f(y) dy \quad (5.68)$$

empleando las ecs. (5.65), 5.66 y (5.68):

$$f(y) = \frac{y^2 v_{e1} A_{ht} f_{st}(y_f)}{y_f j d s} \quad (5.69)$$

$$\int_0^y f(y) dy = \int_0^y \frac{y^2 v_{e1} A_{ht} f_{st}(y_f)}{y_f j d s} dy = \frac{v_{e1} A_{sh} f_{st}(y_f)}{s} \frac{1}{3 y_f j d} y^3 \quad (5.70)$$

Reemplazando en la ec. (5.70) en la ec (5.68) se obtiene,

$$\int_0^y dF_b = \int_0^y f(y) dy = \frac{v_{e1} A_{sh} f_{st}(y_f)}{s} \frac{1}{3 y_f j d} y^3 \quad (5.70)$$

Combinando las ecs. (5.67), y (5.70) se tiene la expresión que define  $T(y)$ :



$$T(y) = T_e - \int_0^y dF_b = T_e - \frac{v_{e1} A_{sh} f_{st}(y_f)}{s} \frac{1}{3 y_f j d} y^3 \quad (5.71)$$

Como en columnas rectangulares, en columnas circulares, en la interfase de las Regiones 3 y 4, la fuerza en tracción en la barra equivalente está asociada con la deformación axial en la barra,  $\varepsilon_s$ , considerando además  $T_e = \varepsilon_s E_s A_{st}$ , a partir de la ec (5.71) se obtiene:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_s \left( 1 - \frac{1}{T_e} \int_0^y dF_b \right) \quad (5.72)$$

Reemplazando en la ec. (5.72) el valor de la integral  $\int_0^y dF_b =$  dado por la ec. (5.70) se obtiene:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_s \left[ 1 - \frac{1}{T_e} \frac{v_{e1} A_{sh}}{3 j d s y_f} f_{st}(y_f) y^3 \right] \quad (5.73)$$

La deformación  $\varepsilon_f$  para columnas circulares se puede obtener haciendo  $y = y_f$  en la ec. (5.73).

Considerando  $T'_e = T(y_f)$ , admitiendo la hipótesis de que las fuerzas en tracción en el concreto no varían en la Región 3, de las ecs. (5.67) y (5.70), haciendo  $y = y_f$ , para  $T_e - T'_e$  se obtiene:

$$T_e - T'_e = \int_0^{y_f} dF_b = \frac{1}{3} \frac{v_{e1} A_{sh}}{j d s} f_{st}(y_f) y_f^2 \quad (5.74)$$

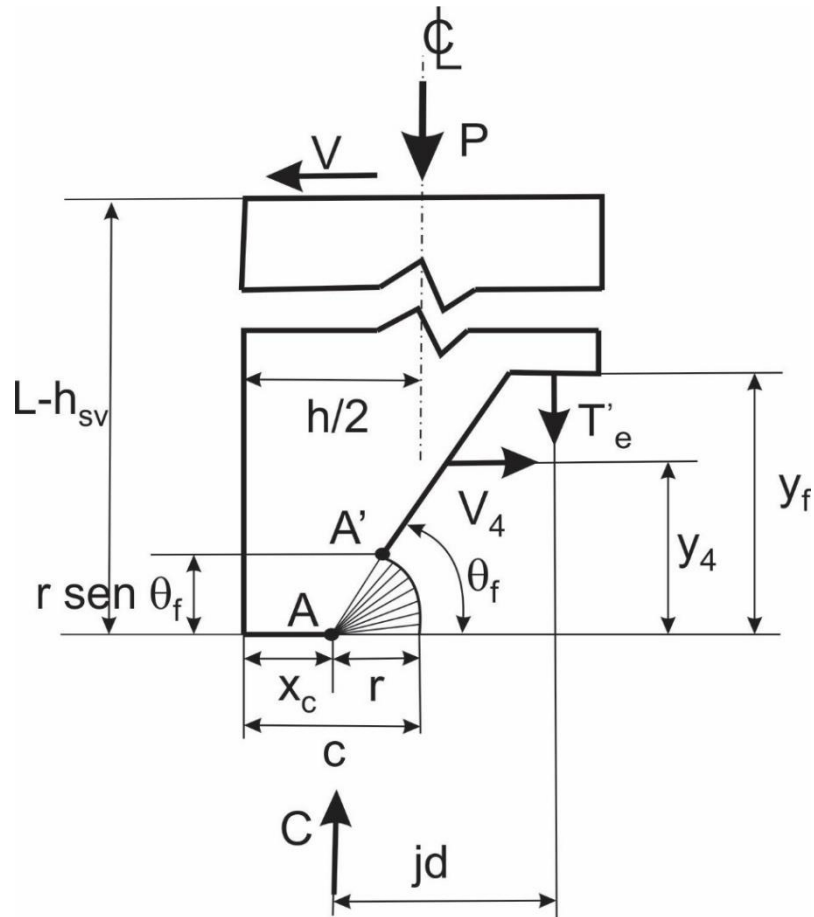
La ec. (5.74) se emplea en el cómputo del ángulo  $\theta_f$  como se muestra más adelante.

### Evaluación del ángulo $\theta_f$

La Fig 5.14 muestra la Region 3 en la que actúa la fuerza cortante  $V_4$  definida en la ec (5.52), la cual debe ser resistida por el refuerzo transversal en esta Región. En el extremo superior de la Región 3 actúa la fuerza en tracción  $T'_e$ . Se considera que la fuerza cortante  $V_4$  es resistida por el refuerzo transversal a lo largo de  $y_f - r \text{sen} \theta_f$ , y que el esfuerzo en este refuerzo varía desde el valor 0 en la ordenada  $y = r \text{sen} \theta_f$ , al valor  $f_{st}(y_f)$  en la ordenada  $y = y_f$ , lo que lleva a la siguiente expresión:

$$V_4 = v_{e2} \frac{A_{ht}}{s} f_{st}(y_f)(y_f - r \text{sen} \theta_f) \quad (5.75)$$

donde  $v_{e2}$  es el factor de fuerza efectiva del refuerzo transversal en la Región 3. En el Apéndice C se muestran resultados de un estudio paramétrico desarrollado para encontrar el valor de  $v_{e2}$  para columnas de sección circular, el cual resultó igual a  $0.5 v_{e1}$ . Como se muestra en el Apéndice C, para columnas rectangulares el valor de  $v_{e2}$  es  $2/3$  (Restrepo y Rodríguez, 2020).



**Figura 5.14** Geometría y fuerzas actuantes en la Región 3.

En la Fig 5.14 tomando momentos respecto al punto A y haciendo  $V=2/3V_{max}$ , ver ec (5.49), se tiene:

$$T'_e = -\frac{V_4 y_4}{jd} + \frac{\frac{2}{3}V_{max}L - P\left(\frac{h}{2} - x_c\right)}{jd} - \frac{\frac{2}{3}V_{max}h_{sv}}{jd} \quad (5.76)$$

De acuerdo con la ec (5.53) el segundo término de la ec (5.76) es igual a  $T_e$ , valor de la fuerza en tracción de la barra equivalente en el extremo inferior de la Región 3, lo que lleva a:

$$T_e - T'_e = \frac{V_4 y_4}{jd} + \frac{\frac{2}{3}V_{max}h_{sv}}{jd} \quad (5.77)$$

Se define el parámetro  $\beta_4$  como:

$$\beta_4 = \frac{y_4}{y_f} \quad (5.78)$$

En el Apéndice C se muestran los resultados de un estudio paramétrico desarrollado para encontrar el valor de  $\beta_4$ , tanto para columnas rectangulares como circulares.

Igualando las ecs (5.74) y (5.77) se tiene

$$\frac{V_4 y_4}{jd} + \frac{\frac{2}{3}V_{max}h_{sv}}{jd} = \frac{1}{3} \frac{v_{eI} A_{ht}}{j d s} f_{st}(y_f) y_f^2 \quad (5.79)$$

Combinando las ecs. (5.78) y (5.79)

$$f_{st}(y_f) = \frac{3s}{v_{eI} A_{ht} y_f^2} \left( V_4 \beta_4 y_f + \frac{2}{3} V_{max} h_{sv} \right) \quad (5.80)$$

El Apéndice C muestra la solución de las ecs (5.75) y (5.80), la que permite encontrar el valor de  $y_f$  en columnas circulares, y por tanto el valor de  $\theta_f$  que cumple la condición de que el cortante resistente en la Región 3 sea igual al cortante actuante  $V_4$ .

### Contribución de la Región 3 al desplazamiento lateral de la columna

Un procedimiento aproximado propuesto por Restrepo y Rodriguez (2020) para el cómputo del desplazamiento  $\Delta_3$  es considerar el alargamiento de la cuerda,  $\Delta_l$ , ver Figs 5.8c y 5.13b, igual a:

$$\Delta_l = \int_0^{y_f} \varepsilon(y) dy \quad (5.81)$$

En este procedimiento se emplea la hipótesis simple de que  $\Delta_l$  se concentra en el punto B con la ordenada  $y = y_f/2$ , ver Fig 5.15, lo cual lleva a:

$$\theta_r = \frac{\frac{\Delta_l}{\cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right)}}{l_3} = \frac{\Delta_l}{l_3 \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right)} \quad (5.82)$$

donde  $l_3$  se define como, ver Fig 5.13:

$$l_3 = \sqrt{\left(\frac{y_f}{2}\right)^2 + (jd)^2} - r \quad (5.83)$$

El valor de la contribución de la Región 3 al desplazamiento lateral de la columna,  $\Delta_3$ , se encuentra multiplicando el giro de la cuerda en tracción por la longitud de columna que gira, ver Fig 5.15, lo que lleva a:

$$\Delta_3 = \left[ L - h_{yv} - (c - x_c) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_f}{2}\right) \right] \theta_r \quad (5.84)$$

En el caso de columnas rectangulares el cómputo de  $\Delta_l$  empleando la ec. (5.81) es sencillo por que  $\varepsilon(y)$  se define con una expresión simple, lo que no ocurre con el caso de  $\varepsilon(y)$  para columnas circulares, como se aprecia en la ec. (5.73).

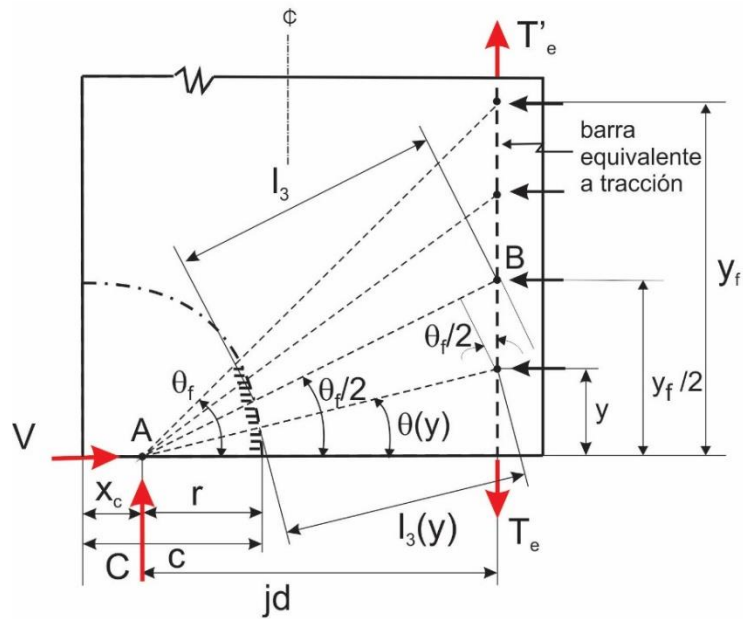


Figura 5.15 Zona rígida y agrietamiento con ángulo variable en la Región 3

El procedimiento más elaborado para obtener el valor del desplazamiento  $\Delta_3$  se describe en lo que sigue.

El diferencial de rotación  $d\theta_r(y)$  es igual a, ver Fig. 5.16:

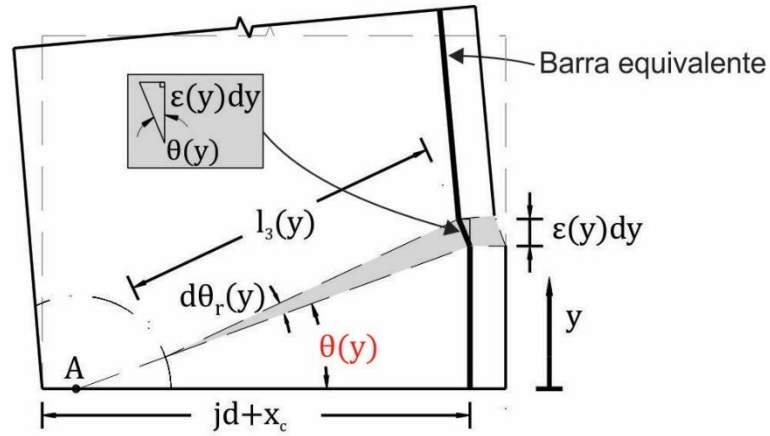
$$d\theta_r(y) = \frac{\varepsilon(y)dy}{l_3(y) \cos \theta(y)} = \frac{\varepsilon(y)}{l_3(y) \cos \theta(y)} dy \quad (5.85)$$

y la contribución de este diferencial de rotación al desplazamiento lateral de la columna es:

$$d\Delta_3 = L''(y) d\theta_r(y) \quad (5.86)$$

donde

$$L''(y) = L - h_{sv} - (c - x_c) \text{sen} \theta(y) \quad (5.87)$$



**Figura 5.16** Detalles de grieta en la ordenada  $y$  en la Región 3.

El desplazamiento  $\Delta_3$  se obtiene integrando la ec (5.86), empleando para  $d\theta_r(y)$  y  $L''(y)$  las ecs (5.85) y (5.87), respectivamente, lo que lleva a:

$$\Delta_3 = \int_0^{y_f} [L - h_{sv} - (c - x_c) \text{sen}\theta(y)] \frac{\varepsilon(y)}{l_3(y) \cos\theta(y)} dy \quad (5.88)$$

donde el parámetro  $\varepsilon(y)$  se obtiene de la ec (5.73). Este parámetro para columnas rectangulares tiene una expresión diferente (Restrepo y Rodríguez, 2020). Para columnas rectangulares y circulares, los parámetros  $\text{sen}\theta(y)$ ,  $\cos\theta(y)$  y  $l_3(y)$  se definen como, ver Fig 5.15:

$$\text{sen}\theta(y) = \frac{y}{\sqrt{(jd)^2 + y^2}} \quad (5.89)$$

$$\cos\theta(y) = \frac{jd}{\sqrt{(jd)^2 + y^2}} \quad (5.90)$$

$$l_3(y) = \sqrt{(jd)^2 + y^2} + x_c - c \quad (5.91)$$

La ec 5.89 se puede escribir como

$$A_3 = \int_0^{y_f} f(y) dy \quad (5.92)$$

donde el término  $f(y)$  es igual a la expresión dentro de la integral en la ec (5.88).

$$f(y) = [L - h_{sv} - (c - x_c) \text{sen}\theta(y)] \frac{\varepsilon(y)}{l_3(y) \cos\theta(y)} \quad (5.93)$$

Para resolver la ec (5.92) se emplea el método de integración de Gauss-Lobatto, con los mismos valores de parámetros del método empleados en este trabajo para la solución de la ec. (5.68). Los parámetros  $c$  y  $m$  que emplea el método son iguales a  $y_f/2$ . El valor de estos parámetros lleva las siguientes parejas de valores  $t_i$ ,  $c+mt_i$ , que se emplean en el referido método:

$t_i$	$c+mt_i$
-1	0
0	$y_f/2$
1	$y_f$

Parámetro  $T_1$

$$c+mt_1 = 0.5y_f + 0.5y_f(-1) = 0$$

Se evalúa la función  $f(y) = f(c+mt_1) = f(0)$ , empleando la ec. (5.93).

De la ec. (5.91):

$$l_3(0) = jd + x_c - c$$

De la ec. (5.73):

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_s$$

De la ec. (5.93), para  $y=0$ :

$$f(y) = f(0) = \frac{L - h_{sv} - (c - x_c) \text{sen}(0)}{(jd + x_c - c) \cos(0)} \varepsilon_s = \frac{\varepsilon_s}{(jd + x_c - c)} (L - h_{sv})$$

$$T_1 = w_1 f(c + mt_1) = \frac{1}{3} f(0) = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_s}{(jd + x_c - c)} (L - h_{sv}) \quad (5.94)$$

Parámetro  $T_2$

$$c+mt_2=0.5y_f+m(0) = 0.5y_f$$

De la ec. (5.91):

$$l_3(0.5y_f) = (jd^2 + 0.25y_f^2)^{0.5} + x_c - c$$

El valor de  $\varepsilon(0.5y_f)$  se obtiene reemplazando  $y = 0.5y_f$  en la ec. (5.73), lo que lleva a:

$$\varepsilon(0.5y_f) = \varepsilon_s T_{22}$$

donde  $T_{22}$  es igual a:

$$T_{22} = 1 - \frac{1}{24T_e} \frac{v_{e1} A_{ht}}{jd s} f_{st}(y_f) y_f^2$$

Se define el parámetro  $T_{21}$  como:

$$T_{21} = \frac{[L - h_{sv} - (c - x_c) \operatorname{sen}\theta(0.5y_f)]}{l_3(0.5y_f) \cos \theta(0.5y_f)} = \frac{[L - h_{sv} - (c - x_c) \operatorname{sen}\theta(0.5y_f)]}{[(jd^2 + 0.25y_f^2)^{0.5} + x_c - c] \cos \theta(0.5y_f)} \quad (5.95)$$

La función  $f(y)$ , definida en la ec. (5.93), se evalúa en  $c+mt_2=0.5y_f$ :

$$f(c+mt_2) = f(0.5y_f) = T_{21} \varepsilon_s T_{22}$$

El parámetro  $T_2$  del método Gauss-Lobatto se define como:

$$T_2 = w_2 f(c+mt_2) = \frac{4}{3} f(0.5y_f) = \frac{4}{3} T_{21} \varepsilon_s T_{22} \quad (5.96)$$

Parámetro  $T_3$

$$c+mt_3=0.5y_f+0.5y_f(1) = y_f$$

De la ec. (5.91):

$$l_3(y_f) = (jd^2 + y_f^2)^{0.5} + x_c - c$$

El valor de  $\varepsilon(y_f)$  se obtiene reemplazando  $y = y_f$  en la ec. (5.73), lo que lleva a:

$$\varepsilon(y_f) = \varepsilon_f = \varepsilon_s T_{32}$$

donde  $T_{32}$  es igual a:

$$T_{32} = 1 - \frac{1}{3T_e} \frac{v_{e1} A_{ht}}{jd s} f_{st}(y_f) y_f^2$$

Se define el parámetro  $T_{31}$  como:



$$T_{31} = \frac{[L - h_{sv} - (c - x_c) \text{sen}(y_f)]}{l_3(y_f) \cos(y_f)} = \frac{[L - h_{sv} - (c - x_c) \text{sen}(y_f)]}{\left[ (jd^2 + y_f^2)^{0.5} + x_c - c \right] \cos(y_f)}$$

La función  $f(y)$  definida en la ec. (5.93) se evalúa en  $c + mt_3 = y_f$ :

$$f(c + mt_3) = f(y_f) = T_{31} \varepsilon_s T_{32}$$

El parámetro  $T_3$  del método Gauss-Lobatto se define como:

$$T_3 = w_3 f(c + mt_3) = \frac{1}{3} f(y_f) = \frac{1}{3} T_{31} \varepsilon_s T_{32} = \frac{1}{3} T_{31} \varepsilon_f \quad (5.97)$$

Finalmente, la solución de la ec. (5.92) para columnas circulares es:

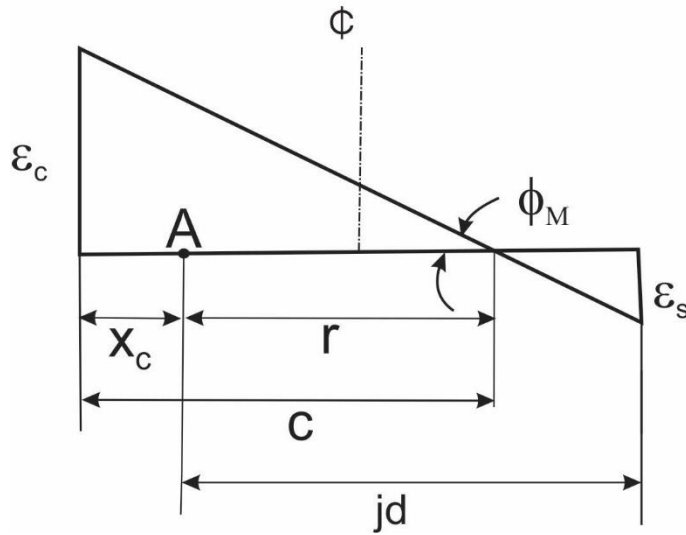
$$\Delta_3 = \int_0^{y_f} f(y) dy = m(T_1 + T_2 + T_3) = 0.5 y_f (T_1 + T_2 + T_3) \quad (5.98)$$

donde los términos  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  están dados por las ecs. (5.94), (5.96) y (5.97), respectivamente.

## 5.5 Región 4 (Restrepo y Rodriguez, 2020)

Se postula la hipótesis de que las deformaciones en esta región se deben sólo a flexión. Se supone que la longitud de esta sección es igual a  $h_{sv}$ , ver Fig 5.1. Debido a la pequeña longitud de esta región se supone que la curvatura es constante.

En el procedimiento de cómputo de desplazamientos debido a esta región, como se muestra en lo que sigue, estos desplazamientos se valúan para el momento actuante en la base de la columna,  $\eta M_{max}$ , al cual en la Región 4 le corresponde la curvatura  $\Phi_M$ . Esta curvatura en forma adimensional,  $\Phi_M h$ , se define con la siguiente expresión, ver Fig 5.15. La resultante de las fuerzas resistentes en compresión, C, se ubica en el punto A.



**Figura 5.15** Distribución de deformaciones en una sección de la Región 4

$$\Phi_M h = \frac{\varepsilon_s}{\frac{jd}{h} + \frac{x_c}{h} - \frac{c}{h}} \quad (5.99)$$

La rotación de la columna debido a la Región 4,  $\theta_4$ , es igual a:

$$\theta_4 = \Phi_M h \frac{h_{sv}}{h} \quad (5.100)$$

La contribución de la Región 4 al desplazamiento lateral de la columna,  $\Delta_4$ , es igual a:

$$\Delta_4 = \theta_4 \left( L - \frac{h_{sv}}{2} \right) \quad (5.101)$$

## 5.6 Región 5

Esta región toma en cuenta la rotación de la base de la columna originada por la penetración de deformaciones en las barras de refuerzo longitudinales que entran en la cimentación (Hines et al., 2004), estas deformaciones son de tracción o compresión. Este efecto en la respuesta inelástica de elementos de concreto reforzado ha sido estudiado en la literatura (Priestley et al., 1996). Sin embargo, la penetración de deformaciones antes de la fluencia ha sido poco estudiado (Crisafulli et al., 2002), y en muchos casos ha sido ignorado.

Se debe mencionar que tanto la penetración de deformaciones antes y después de la fluencia han sido estudiados en investigaciones sólo considerando deformaciones en tracción de las barras que penetran en la cimentación. Sin embargo, ensayos de columnas de puentes de concreto ante cargas cíclicas reversibles han mostrado que antes de la fluencia es importante considerar la penetración de deformaciones causada por la concentración de compresiones en el concreto (Hines et al., 2004). Este efecto, de penetración de deformaciones en tracción y compresión, se considera en el modelo que se propone en este estudio para el cómputo de la contribución de la Región 5 al desplazamiento lateral de la columna.

La expresión que se propone para el cómputo de la rotación de esta región debida a la penetración de deformaciones en la Región 5,  $\theta_5$ , es:

$$\theta_5 = \frac{1}{\Gamma} \frac{d_b}{h} \frac{\rho_l f_y}{\sqrt{f'_c} (1 + b P^*)} \quad (5.102)$$

donde

$$P^* = \frac{P}{A_g f'_c} \quad (5.103)$$

El valor de los parámetros  $\Gamma$  y  $b$  en la ec (5.102) se obtuvieron variando estos valores y el parámetro  $\zeta$  para obtener la mejor correlación entre la predicción del desplazamiento lateral de la columna con el modelo analítico empleado y los resultados experimentales de las columnas de la base de datos empleada, como se describe en el Capítulo 6.

La contribución del producto  $d_b f_y$  en la penetración de deformaciones después de la fluencia ha sido estudiada por Priestley et al. (1996). Panagiotakos y Fardis (2001) llevaron a cabo análisis de regresión empleando una base de datos de columnas con el fin de predecir la rotación de la base de la columna debido a la penetración de deformaciones en la fluencia. Estos autores también consideraron la contribución del producto  $d_b f_y$  así como de la inversa de  $\sqrt{f'_c}$ . La ec (5.104) muestra la expresión propuesta por Panagiotakos y Fardis (2001) para la predicción de la rotación de la base de la columna en la fluencia del elemento.

$$\theta_{rP} = \frac{0.25 \varepsilon_y d_b f_y}{(d - d') \sqrt{f'_c}} \quad (5.104)$$

donde  $d$  es el peralte efectivo de la sección de columna, y  $d'$  es la distancia del centro del refuerzo en compresión a la fibra extrema en compresión. La relación  $\varepsilon_y/(d-d')$  en la ec (5.104) es igual a la curvatura de fluencia  $\Phi_y$ , lo que implica que la ec (5.104) no considera el efecto de la penetración de deformaciones en compresión del concreto.

La rotación  $\theta_5$ , ec (5.102), origina la contribución de la Región 5 al desplazamiento lateral de la columna,  $\Delta_5$ , y es igual a:

$$\Delta_5 = L \theta_5 \quad (5.105)$$

## 5.7 Desplazamiento de Fluencia de una Columna de Concreto Reforzado

El valor que se obtiene con el procedimiento propuesto en este estudio para el cómputo del desplazamiento lateral de fluencia de una columna,  $\Delta_{yc}$ , se define como:

$$\Delta_{yc} = \frac{I}{\eta} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5) \quad (5.106)$$

Donde los valores del parámetro  $\eta$ , y de los parámetros anteriormente comentados que intervienen en el valor de  $\Delta_5$  en la ec (5.106), se obtuvieron de un procedimiento de optimización. El objetivo de este procedimiento fue el de minimizar la diferencia de resultados obtenidos de la predicción de desplazamientos empleando el método propuesto en este trabajo y de los medidos en los estudios experimentales de columnas de la base de datos empleada. El procedimiento de optimización empleado se describe en el Capítulo 6.

En las definiciones de los desplazamientos calculados  $\Delta_1$  a  $\Delta_5$ , que corresponden al momento actuante en la base igual a  $\eta M_{max}$ , es necesario tener expresiones para los parámetros que intervienen en estas definiciones. Como se ha mostrado, estos parámetros son  $jd$ ,  $\Phi_{Mh}$  y  $x_c$ . Para obtener  $x_c$  es necesario a su vez conocer una expresión para el

parámetro  $jd(1-\alpha)$ , ver Fig 5.9b. Para conocer el valor de la fuerza cortante  $V_4$  se debe conocer el valor del momento  $M_{s@Mmax}$ , el cual de acuerdo con la ec (5.46) depende del par  $T_e jd$ , por lo que es necesario contar con una expresión para este parámetro. También es necesario contar con una expresión para la fuerza en tracción del concreto  $T_{cl}$ . Además, se debe contar con expresiones para el momento nominal de una columna,  $M_n$ , el cual se define como el valor del momento en la base de la columna cuando la fibra extrema alcanza el valor 0.003 para la deformación en compresión. También es necesario conocer los parámetros asociados a  $2/3 M_n$  y  $0.8 M_n$ . En el cómputo de las expresiones para estos parámetros se consideran dos tipos de sección de columna, rectangular y circular. En el Apéndice D de Restrepo y Rodriguez (2020) se muestra las expresiones empleadas para estos parámetros, así como el procedimiento empleado para obtener estas expresiones.

## 6. Procedimiento de Optimización para Definir la Rigidez Lateral y Desplazamiento de Fluencia, y Resultados Obtenidos

Se empleó un procedimiento de optimización para minimizar las diferencias entre los resultados del empleo de la ec 5.107 para el cómputo del desplazamiento de fluencia  $\Delta_{yc}$  y el desplazamiento de fluencia experimental,  $\Delta_{ym}$ , obtenido con el empleo de la ec 4.10 analizada en el Capítulo 4.

La rigidez lateral calculada,  $K_{c@η}$ , se define como:

$$K_{c@η} = \frac{V_{max}}{\Delta_{yc}} \quad (6.1)$$

donde  $V_{max}$  es la carga lateral máxima correspondiente al momento máximo medido en la base de la columna,  $M_{max}$ .

La rigidez lateral obtenida con resultados experimentales de la base de datos,  $K_{m@η}$ , es la definida en la ec 4.9 en el Capítulo 4.

El procedimiento de optimización empleado consistió en buscar el valor 1 para la relación  $K_{m@η} / K_{c@η}$ , minimizando la dispersión de resultados para esta relación. Para ello se consideró para el parámetro  $η$  en la ec 5.107 el valor 2/3, se variaron los valores de los parámetros  $Γ$ , y  $b$  en la ec 5.103 empleada para el cómputo del desplazamiento  $\Delta_5$ , y se variaron los valores del parámetro  $ξ$  (que interviene en la definición de la longitud de la Región 4) como muestra el procedimiento que se describe a continuación.

De la ec 5.107 se obtiene el desplazamiento de fluencia correspondiente a la suma de los desplazamientos en la fluencia que contribuyen las Regiones 1 a la 4,  $\Delta_{yc1234}$ , el cual se define como:

$$\Delta_{yc1234} = \frac{l}{η} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) \quad (6.2)$$

El estudio de optimización emplea un desplazamiento objetivo en la fluencia debido a la contribución de la Región 5, para ello se define el desplazamiento  $\Delta_{5req}$  como:

$$\Delta_{5req} = \Delta_{ym} - \Delta_{yc1234} \quad (6.3)$$

La ec 5.103 se puede escribir en la forma:

$$\frac{\Delta_5}{L} = \frac{1}{\Gamma} \frac{d_b}{h} \frac{\rho_l f_y}{\sqrt{f_c'} (1 + b P^*)} \quad (6.4)$$

Se define  $\Delta_{5cal}$  a valor calculado con la ec. 6.4 empleando valores específicos de los parámetros  $\Gamma$  y  $b$ ,

El procedimiento de optimización emplea la siguiente definición de error

$$Error = (\Delta_{5req} - \Delta_{5cal})^2 \quad (6.5)$$

El procedimiento emplea la ec 6.5 para cada una de las 22 columnas de base de datos, buscando los valores de los parámetros  $\xi$ ,  $\Gamma$  y  $b$  que minimizan a la sumatoria de *Error*, ec. 6.5, en las 22 columnas de los valores calculados con la ec. 6.5. Con los valores óptimos de los parámetros  $\xi$ ,  $\Gamma$  y  $b$  obtenidos con el procedimiento descrito, se calcula para cada una de las 22 columnas el valor de  $\Delta_5$  empleando la ec. 6.4, así como los valores del desplazamiento  $\Delta_{yc}$  empleando la ec. 5.107. Estos valores se comparan con los medidos del desplazamiento de fluencia  $\Delta_{ym}$ , definido en la ec. 4.10, y se busca la mejor solución como muestra la Tabla 6.1. Esta tabla muestra valores de las relaciones  $\Delta_{ym}/\Delta_{yc}$ , y  $K_{m@n} / K_{c@n}$  para diferentes combinaciones de los  $\xi$ ,  $\Gamma$  y  $b$ , y en negritas esta tabla muestra los valores seleccionados para la predicción del desplazamiento  $\Delta_5$ , que son,  $\xi=2$ ,  $\Gamma=18$ , y  $b=0.9$ .

Con base en los resultados encontrados en el procedimiento de optimización, la ecuación para calcular  $\Delta_5$  es

$$\frac{\Delta_5}{L} = \frac{1}{18} \frac{d_b}{h} \frac{\rho_l f_y}{\sqrt{f_c'} (1 + 0.9 P^*)} \quad (6.6)$$

**Tabla 6.1** Resultados del estudio paramétrico para definir  $\Delta_5$  en columnas circulares de la base de datos, y comparativa de valores medidos,  $\Delta_{ym}$ , y calculados,  $\Delta_{yc}$ , empleando la ec 6.4.

Parámetros			Promedio		Coeficiente de variación	
$\xi$	$\Gamma$	b	$\Delta_{ym}/\Delta_{yc}$	$K_{m@n} / K_{c@}$	$\Delta_{ym}/\Delta_{yc}$	$K_{m@n} / K_{c@}$
1	16.978	0.778	1.008	1.016	0.146	0.167
1.25	17.039	0.787	0.999	1.024	0.146	0.167
1.50	17.379	0.819	0.996	1.027	0.146	0.166
1.75	17.721	0.847	0.993	1.030	0.146	0.166
<b>2.00</b>	<b>18.066</b>	<b>0.870</b>	<b>0.990</b>	<b>1.033</b>	<b>0.146</b>	<b>0.166</b>
2.25	18.413	0.888	0.987	1.036	0.146	0.167

La Tabla 6.2 muestra para las columnas de la base de datos, los valores de la resistencia lateral medida  $V_{max}$ , el desplazamiento  $\Delta_c$ , calculado con el modelo desarrollado en el Capítulo 5 y empleando para  $\Delta_5$  la ec. 6.5. La Tabla 6.2 también muestra la rigidez lateral con sección no agrietada,  $K_o$ , y las rigideces laterales efectivas medida y calculada,  $K_{m@n}$ , y  $K_{c@n}$ , respectivamente, donde  $K_{c@n}$  se obtuvo empleando la ec. 6.1.

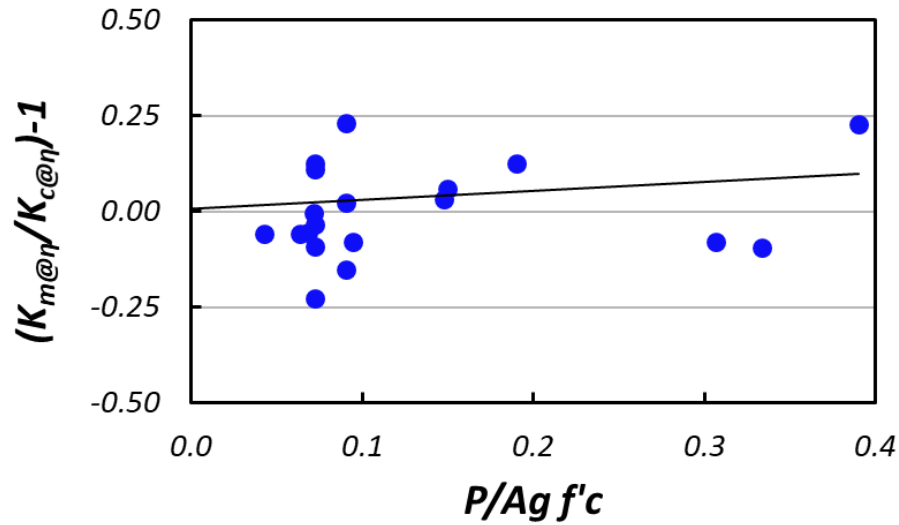
Tabla 6.2. Rigideces laterales efectivas medidas y calculadas con el modelo propuesto empleando la base de datos de columnas circulares



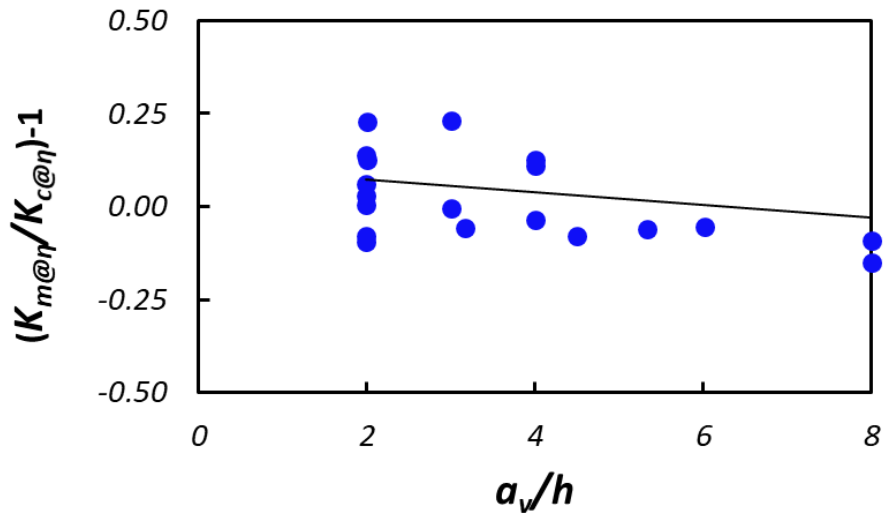
Numero	Especimen	$V_{max}$ (kN)	$\Delta_c$ (mm)	$K_o$ (kN/m)	$K_{m@η}$ (kN/m)	$K_{c@η}$ (kN/m)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	VUNH2	279	10.98	248.92	28.94	25.42
2	VUNH5	379	13.08	240.94	29.12	28.97
3	KOWALSU1	153	36.27	13.28	3.97	4.22
4	RES-U1	1485	27.81	156.44	50.31	53.39
5	NIST-F	1480	120.30	31.64	11.63	12.30
6	NIST-S	3300	49.81	239.76	66.03	66.26
7	LEH1015	98	80.42	2.57	0.94	1.22
8	LEH407	178	17.12	36.88	11.70	10.40
9	LEH415	285	23.43	39.15	13.51	12.16
10	LEH430	476	32.66	43.77	14.07	14.58
11	LEH815	151	76.49	5.01	1.79	1.97
12	CAL328	556	18.75	102.00	36.50	29.66
13	CAL828	204	74.78	5.64	2.32	2.73
14	CAL1028	190	132.00	2.90	1.47	1.44
15	KUN97A2	74	14.73	14.11	4.62	5.02
16	VU98NH4	986	16.40	287.10	61.95	60.11
17	VU98NH3	551	8.79	249.31	66.43	62.68
18	CHAI-3	239	42.85	12.90	8.89	5.58
19	WONG90U1	495	8.97	224.51	62.16	55.16
20	VU98NH1	585	6.89	247.16	78.11	84.90
21	VU98NH6	1100	15.65	287.10	63.56	70.27
22	WONG90U3	626	9.24	222.82	83.29	67.77

Para evaluar la confiabilidad de la predicción de rigideces laterales empleando el procedimiento propuesto se evaluó la relación de rigidez residual, definida como  $(K_{m@η}/K_{c@η})-1$ , para las columnas circulares de la base de datos. La figura 6.1 muestra los valores del residuo  $(K_{m@η}/K_{c@η})-1$  obtenido con la base de datos de columnas circulares empleando la ec 6.7. La Fig 6.1 también muestra las líneas de tendencias que representan al mejor ajuste de estos resultados. La Fig 6.1a muestra los valores de este residuo en función de la relación de carga axial,  $P/(A_g f'_c)$ . La Fig 6.1b muestra los valores de este residuo en

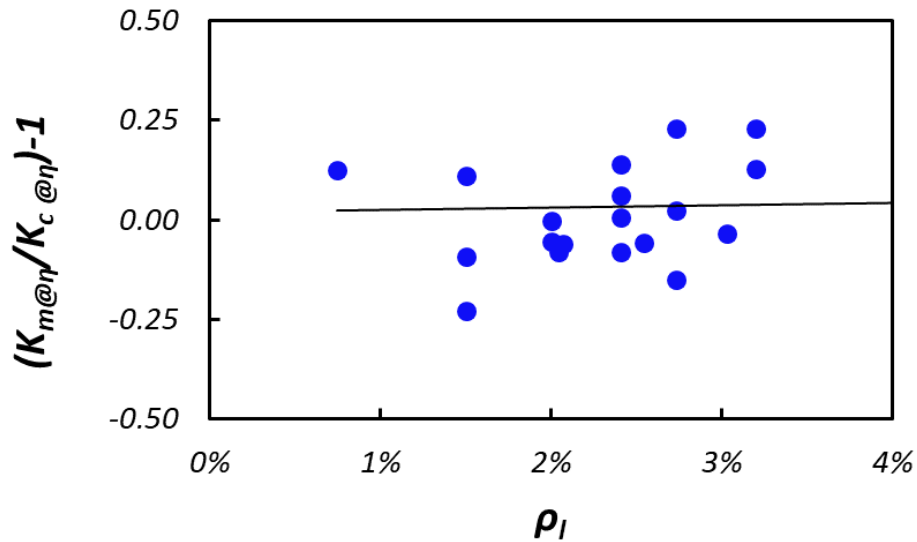
función de la relación claro de cortante a peralte,  $a_v/h$ , y la Fig 6.1c muestra los valores de este residuo en función de la cuantía de refuerzo longitudinal,  $\rho_l$ . Se puede apreciar que no hay sesgo relevante de estos residuos respecto a  $P/(A_g f'_c)$ ,  $a_v/h$  o  $\rho_l$ .



(a) Residuo en función de  $P/(A_g f'_c)$



(b) Residuo en función de  $a_v/h$

(c) Residuo en función de  $\rho_l$ 

**Figura 6.1** Relación de rigidez residual en la base de datos de columnas circulares en función de  $P/(A_g f'_c)$ ,  $a_w/h$  y  $\rho_l$ .

En el Capítulo 2 se definió el factor de modificación de rigideces,  $\zeta$ . Este factor para el caso de rigidez efectiva medida como la secante a  $2/3$  de  $V_{max}$  es el factor  $\zeta'$ . En el caso de emplear el momento de inercia de la sección transformada,  $I_t$ , el factor de modificación de rigideces empleando  $I_t$  y la rigidez efectiva medida,  $(\zeta'_t)_m$ , es

$$(\zeta'_t)_m = \frac{K_{m@eta}}{K_o} \quad (6.7)$$

Para el caso de la rigidez efectiva calculada con el modelo propuesto, el factor de modificación de rigideces,  $(\zeta'_t)_c$ , es

$$(\zeta'_t)_c = \frac{K_{c@eta}}{K_o} \quad (6.8)$$

donde  $K_o$  emplea  $I_t$  y se define en la ec. (2.6)

Cuando el factor de modificación de rigideces emplea el momento de inercia de la sección bruta,  $I_g$ , los factores de modificación de rigideces efectiva medida y calculada,  $(\zeta'_g)_m$  y  $(\zeta'_g)_c$ , respectivamente, son iguales a (Restrepo y Rodriguez, 2021)

$$(\zeta'_g)_m = \frac{I_t}{I_g} (\zeta'_t)_m \quad (6.9)$$

$$(\zeta'_g)_c = \frac{I_t}{I_g} (\zeta'_t)_c \quad (6.10)$$

La Tabla 6.3 muestra para las columnas de la base de datos, los valores de los factores de modificación de rigidez medidos y calculados con el modelo propuesto, empleando las definiciones dadas en las ecs. 6.7 a 6.10.

Los resultados de la Tabla 6.3 muestran que los valores de la media para la relación entre los factores de modificación de rigideces medidos en las columnas de la base de datos y los calculados con el método propuesto,  $(\zeta'_t)_m / (\zeta'_t)_c$ , fue igual a 1.03, con un coeficiente de variación igual a 15.7%.

Tabla 6.3 Valores de factores de modificación de rigidez medidos y calculados con el modelo propuesto para la base de datos de columnas circulares

Numero	Especimen	$(\zeta'_t)_m$	$(\zeta'_t)_c$	$(\zeta'_t)_m / (\zeta'_t)_c$	$(\zeta'_g)_m$	$(\zeta'_g)_c$	$(\zeta'_g)_m / (\zeta'_g)_c$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	VUNH2	0.116	0.102	1.139	0.138	0.122	1.139
2	VUNH5	0.121	0.120	1.005	0.145	0.144	1.005
3	KOWALSU1	0.299	0.318	0.940	0.351	0.374	0.940
4	RES-U1	0.322	0.341	0.942	0.373	0.396	0.942
5	NIST-F	0.368	0.389	0.945	0.428	0.453	0.945
6	NIST-S	0.275	0.276	0.997	0.322	0.323	0.997
7	LEH1015	0.366	0.474	0.771	0.414	0.536	0.771
8	LEH407	0.317	0.282	1.125	0.338	0.300	1.125
9	LEH415	0.345	0.311	1.111	0.390	0.351	1.111
10	LEH430	0.321	0.333	0.965	0.406	0.421	0.965
11	LEH815	0.358	0.394	0.908	0.405	0.446	0.908
12	CAL328	0.358	0.291	1.231	0.439	0.357	1.231
13	CAL828	0.411	0.484	0.849	0.504	0.594	0.849
14	CAL1028	0.508	0.497	1.023	0.624	0.610	1.023
15	KUN97A2	0.327	0.356	0.920	0.387	0.421	0.920
16	VU98NH4	0.216	0.209	1.031	0.309	0.300	1.031
17	VU98NH3	0.266	0.251	1.060	0.317	0.299	1.060
18	CHAI-3	0.689	0.432	1.594	0.839	0.526	1.594
19	WONG90U1	0.277	0.246	1.127	0.348	0.309	1.127
20	VU98NH1	0.316	0.343	0.920	0.377	0.410	0.920
21	VU98NH6	0.221	0.245	0.905	0.317	0.351	0.905
22	WONG90U3	0.374	0.304	1.229	0.471	0.383	1.229
	Promedio			1.033			
	Desv. Estandar			0.172			
	Coef. de variación			0.166			
	Minimo			0.771			
	Percentil 25%			0.925			
	Mediana			1.001			
	Percentil 75%			1.121			
	Maximo			1.594			

La Figura 6.2 muestra resultados del histograma de la relación  $(\zeta'_t)_m / (\zeta'_t)_c$  empleando los valores mostrados en la Tabla 6.3, esta figura también muestra las frecuencias acumuladas para los valores de esta relación. Estos valores indican que el modelo propuesto de predicción de rigidez lateral de columnas circulares tiene parámetros estadísticos aceptables.

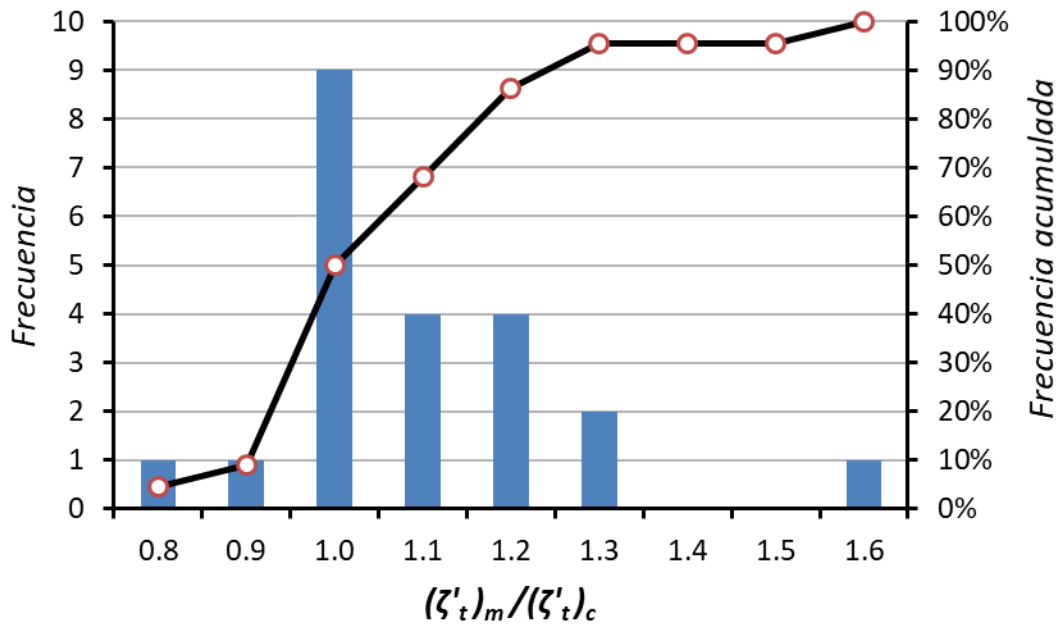


Figura 6.2 Histograma y distribución de frecuencia acumulada de la relación de factores de modificación de rigideces medidos y calculados,  $(\zeta'_t)_m / (\zeta'_t)_c$ , para la base de datos de columnas circulares

### **Evaluación de la predicción de rigideces laterales efectivas propuesta en este estudio y por otros autores empleando la base de datos experimentales de columnas**

Se empleó la base de datos experimentales de columnas circulares para comparar los factores de modificación de rigideces calculados con diferentes métodos,  $(\zeta'_g)_c$ , los cuales se comparan con los factores de modificación de rigideces medidos en los ensayos respectivos,  $(\zeta'_g)_m$ . De acuerdo con la definición de  $\zeta'$  dada en el Capítulo 2, en el caso de empleo de  $I_g$ , el factor  $\zeta'$  también se puede interpretar como  $\zeta'_g = E_c I_{e2/3} / E_c I_g$ , donde para

el caso de  $(\zeta'_g)_m$ , y de  $(\zeta'_g)_c$  con el modelo que se propone en este trabajo, las rigideces  $E_c I_{e2/3}$  se calculan para  $\eta = 2/3$ . El factor  $\zeta_g$  se refiere al caso donde  $\eta \neq 2/3$ .

Los métodos que se consideran en este estudio para el cómputo de  $(\zeta'_g)_c$  han sido descritos en el Capítulo 2. Estos son el método ACI 318-19 (a), el cual considera  $(\zeta'_g)_c = 0.7$ , el método de la AAHSTO (a) (2011), que emplea la ec. (2.3), y el método de la AASHTO (b) (2011), que emplea la Figura 5.6.2-1 de esta guía de diseño. Para la aplicación del método AAHSTO (a) (2011), la rigidez efectiva se obtuvo del análisis momento-curvatura en la columna, empleando el programa *CIRC-2013* (Torres et al, 2013), considerando la pendiente de la secante en la curva momento-curvatura en la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal o cuando el concreto alcanza la deformación en compresión igual a 0.2%, lo que ocurra primero.

También este estudio considera el método de la ASCE/SEI 41-17 (2017), Elwood y Eberhard (2009) con la expresión detallada, ec. (2.5), y finalmente el método propuesto en este trabajo.

La Tabla 6.4 muestra valores del factor de modificación de rigideces,  $(\zeta'_g)_m$ , para las columnas circulares de la base de datos, los valores de  $(\zeta'_g)_c$  calculados para los diversos métodos mencionados, así como los valores de la relación  $(\zeta'_g)_m / (\zeta_g \text{ o } \zeta'_g)_c$ . Esta tabla también muestra diversos valores estadísticos de esta relación para los diversos métodos considerados, donde se aprecia que el método propuesto tiene el valor del mejor promedio, así como la menor desviación estándar y coeficiente de variación.

Tabla 6.4 Factores de modificación de rigideces medidos y calculados

Número	Especimen	$(\zeta_g)_m$	$(\zeta_g \circ \zeta_g)_c$							$(\zeta_g)_m / (\zeta_g \circ \zeta_g)_c$				
			ACI318-19(a)	AASHTO (a)	AASHTO (b)	ASCESEI 41-17	Elwood & Eberhard	Modelo propuesto	ACI318-19(a)	AASHTO (a)	AASHTO (b)	ASCESEI 41-17	Elwood & Eberhard	Modelo propuesto
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	VUNH2	0.14	0.70	0.53	0.46	0.30	0.20	0.12	0.20	0.26	0.30	0.46	0.69	1.14
2	VUNH5	0.14	0.70	0.50	0.46	0.30	0.20	0.14	0.21	0.29	0.31	0.48	0.72	1.01
3	KOWALSU1	0.35	0.70	0.47	0.46	0.30	0.30	0.37	0.50	0.75	0.77	1.17	1.17	0.94
4	RES-U1	0.37	0.70	0.50	0.51	0.30	0.38	0.40	0.53	0.75	0.73	1.24	0.98	0.94
5	NIST-F	0.43	0.70	0.47	0.46	0.30	0.41	0.45	0.61	0.91	0.94	1.43	1.05	0.95
6	NIST-S	0.32	0.70	0.47	0.46	0.30	0.31	0.32	0.46	0.68	0.70	1.07	1.04	1.00
7	LEH015	0.41	0.70	0.41	0.40	0.30	0.49	0.54	0.59	1.01	1.03	1.38	0.85	0.77
8	LEH07	0.34	0.70	0.29	0.32	0.30	0.37	0.30	0.48	1.16	1.06	1.13	0.92	1.12
9	LEH15	0.39	0.70	0.41	0.40	0.30	0.37	0.35	0.56	0.95	0.97	1.30	1.07	1.11
10	LEH30	0.41	0.70	0.63	0.57	0.30	0.37	0.42	0.58	0.64	0.71	1.35	1.11	0.97
11	LEH15	0.41	0.70	0.41	0.40	0.30	0.46	0.45	0.58	0.99	1.01	1.35	0.87	0.91
12	CAL328	0.44	0.70	0.58	0.54	0.30	0.32	0.36	0.63	0.76	0.81	1.46	1.39	1.23
13	CAL828	0.50	0.70	0.58	0.54	0.30	0.47	0.59	0.72	0.87	0.93	1.68	1.07	0.85
14	CAL1028	0.62	0.70	0.58	0.54	0.30	0.50	0.61	0.89	1.07	1.15	2.08	1.24	1.02
15	KUN87A2	0.39	0.70	0.49	0.47	0.30	0.39	0.42	0.55	0.79	0.83	1.29	0.99	0.92
16	VU88NH4	0.31	0.70	0.83	0.81	0.35	0.25	0.30	0.44	0.37	0.38	0.89	1.24	1.03
17	VU88NH3	0.32	0.70	0.56	0.52	0.35	0.28	0.30	0.45	0.57	0.61	0.91	1.13	1.06
18	CHAI-3	0.84	0.70	0.69	0.54	0.39	0.58	0.53	1.20	1.22	1.54	2.17	1.44	1.59
19	WONG90U1	0.35	0.70	0.67	0.61	0.39	0.29	0.31	0.50	0.52	0.57	0.89	1.20	1.13
20	VU88NH1	0.38	0.70	0.71	0.56	0.51	0.42	0.41	0.54	0.53	0.67	0.74	0.90	0.92
21	VU88NH6	0.32	0.70	0.96	0.82	0.53	0.39	0.35	0.45	0.33	0.39	0.59	0.81	0.90
22	WONG90U3	0.47	0.70	0.85	0.65	0.59	0.45	0.38	0.67	0.55	0.72	0.80	1.06	1.23
									Promedio	0.561	0.727	0.780	1.176	1.043
									Desv. Est.	0.205	0.280	0.298	0.450	0.194
									CV	0.365	0.385	0.382	0.382	0.186
									Mínimo	0.198	0.264	0.302	0.461	0.692
									Percentil 25%	0.465	0.537	0.625	0.889	0.909
									Mediana	0.546	0.748	0.748	1.208	1.051
									Percentil 75%	0.606	0.942	0.964	1.373	1.160
									Maximo	1.198	1.217	1.542	2.167	1.436



Para interpretar resultados estadísticos como los mostrados en la Tabla 6.4 para la relación  $(\zeta'_g)_m / (\zeta_g \text{ o } \zeta'_g)_c$  es útil el empleo del llamado diagrama de cajas, el cual se muestra en la Figura 6.3. El eje vertical de esta figura es la relación  $(\zeta'_g)_m / (\zeta_g \text{ o } \zeta'_g)_c$ , el valor de la mediana se muestra con una línea dentro de la caja, cuya altura es igual a la diferencia entre los percentiles 25% y 75%, a esta dimensión también se le conoce como intervalo intercuartil (IQR). Las barras verticales que se extienden encima y debajo del diagrama de cajas tienen una distancia igual a 1.5 IQR medido desde el percentil o al valor del dato (máximo ó mínimo) si es menor que esta distancia. Si el dato extremo sale de la distancia 1.5 IQR, a este dato se le considera un valor atípico, y en la Figura 6.3 se le indica con un asterisco. Las características de lo diagrama de cajas de los métodos estudiados muestran que el método propuesto tiene los mejores parámetros estadísticos.

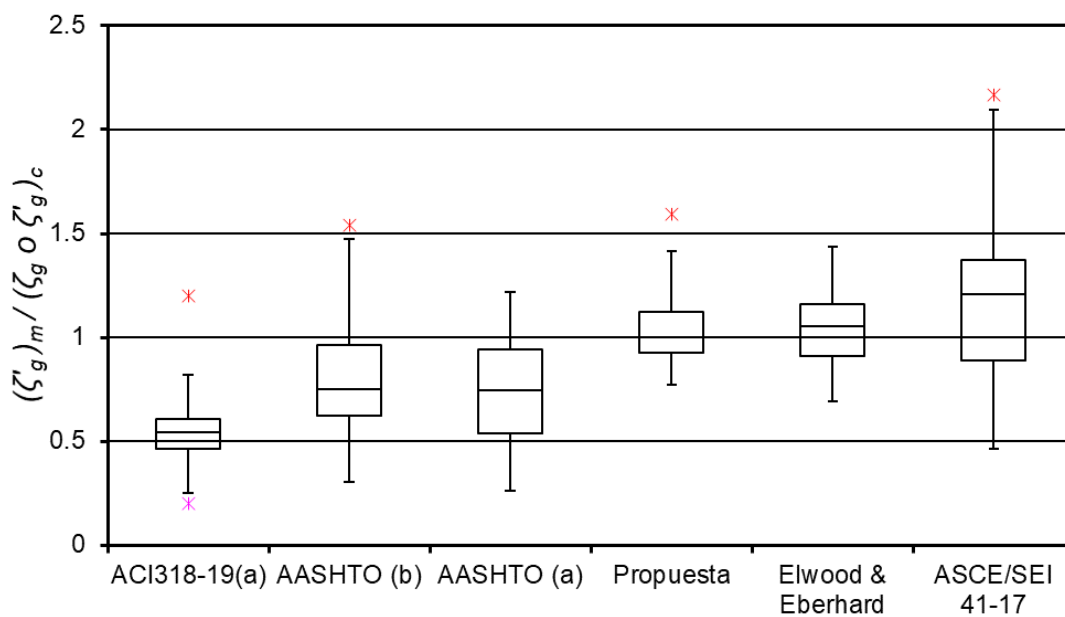


Figura 6.3 Diagrama de cajas para la relación  $(\zeta'_g)_m / (\zeta_g \text{ o } \zeta'_g)_c$  calculada para los métodos considerados empleando la base de datos de columnas circulares.

La Figura 6.4 muestra otro tipo de resultados estadísticos para la relación  $(\zeta'_g)_m / (\zeta_g \text{ o } \zeta'_g)_c$  calculada para los métodos considerados empleando la base de datos de columnas circulares. En este caso se emplea las frecuencias acumuladas para la referida relación de factores de modificación de rigideces. Los resultados de la Figura 6.4 muestran que el método propuesto para el cómputo de factores de modificación de rigideces tiene la mejor correlación entre resultados de la predicción de estos factores y los resultados experimentales, con menor dispersión respecto a los obtenidos empleando los métodos considerados. También esos resultados indican que tanto los métodos del ACI 318-19 (a) como el de la ASCE 41-17 en general sobrestiman o subestiman de manera considerable, respectivamente, los valores calculados de factores de modificación de rigideces respecto a las valores medidos, Figura 6.4.

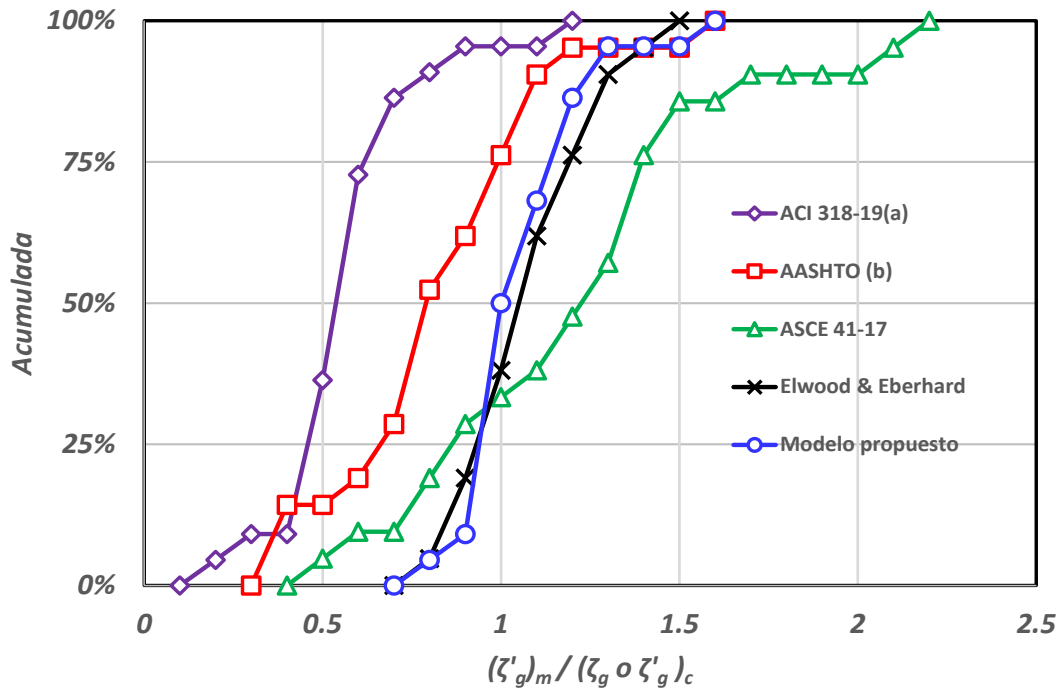


Figura 6.4 Probabilidades acumuladas para la relación  $(\zeta'_g)_m / (\zeta_g \text{ o } \zeta'_g)_c$ , empleando diferentes métodos de cómputo para la base de datos de columnas circulares

## 7. Conclusiones

1. En este estudio se propone un modelo principalmente analítico, calibrado con resultados experimentales, para el cómputo tanto del desplazamiento de fluencia, como de la rigidez lateral efectiva de columnas rectangulares y circulares de concreto reforzado. Esta rigidez se define para una fracción específica del momento probable resistente de la columna.
2. El modelo analítico propuesto para la predicción de desplazamientos toma en cuenta fuentes de desplazamientos de cinco regiones en las que se dividió la columna, con este modelo se llevó a cabo el cómputo de la contribución de cada una de estas regiones al desplazamiento lateral total de la columna
3. La comparativa de resultados de aplicar el procedimiento propuesto para la predicción de desplazamientos de fluencia y los experimentales de la base de datos empleada mostró una dispersión pequeña. Se encontró el valor de 1.03 para la media de los valores de la relación de rigideces experimentales a las calculadas, para la base de datos de columnas circulares, y un coeficiente de variación de los valores de esta relación igual a 16.6%.
4. Los valores de la media y coeficiente de variación para el cociente entre las rigideces laterales efectivas calculadas con el procedimiento propuesto en este estudio y los valores experimentales empleando la base de datos de columnas circulares son menores que los encontrados por otros autores, con otros criterios, y similares a los coeficientes de variación que se obtienen para el módulo de elasticidad del concreto.
5. El procedimiento propuesto en este estudio para la predicción de rigideces laterales efectivas en columnas de concreto reforzado se basa inicialmente en definir la rigidez lateral para una fracción específica del momento probable resistente de la columna.

Para esta fracción se encontró el valor  $2/3$ . Esto es un paso importante para lograr el objetivo de definir rigideces laterales efectivas en la columna, para diversas fracciones del momento probable resistente de una columna.

## Referencias

- ACI Committee 318. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14) and Commentary (ACI 318R-14)*, American Concrete Institute 2014, Farmington Hills, MI, 519
- ASCE. *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*, ASCE/SEI 41-13 (2014), American Society of Civil Engineers, Reston, VA
- AASHTO. *AASHTO Guide Specifications for LRFD Seismic Bridge Design*, 2nd Edition 2011, American Association of State Highway and Transportation Officials.
- Berry, M. P.; Parrish, M.; and Eberhard, M. O., “PEER Structural Performance Database User’s Manual,” *Pacific Earthquake Engineering Research Center*, University of California-Berkeley, Berkeley, CA, (2004), [www.ce.washington.edu/~peer1](http://www.ce.washington.edu/~peer1).
- Collins, M.P. y Mitchell, D., “Prestressed Concrete Structures”, *Prentice Hall*, USA, (1991)
- Carrasquillo, R.L., Nilson, A.H., y Slate, F.O., “Properties of High Strength Concrete Subject to Short-Term Loads”, *ACI Journal*, V 78, No3, Mayo-Junio (1981): 171-178
- Cowper, G.R., “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, New York, USA, (1996): 335-340.
- Crisafulli, F., J., “Seismic Behaviour of Reinforced Concrete Structures With Masonry Infills”, Ph. D. Thesis, Civil Engineering Department, University of Canterbury, New Zealand, 1997.
- Crisafulli, F., Restrepo, J., y Park, R., “Seismic Design of Lightly Reinforced Precast Concrete Rectangular Wall Panels”, *PCI Journal*, V. 47, No 4, July-August (2002): 104-121.
- Chen, Y., Visintin, P., Oehlers, D.J., y Alengaram, U.J., “Size-Dependent Stress-Strain Model for Unconfined Concrete”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol 140 (2014): 04013088-1 a 04013088-11.
- De Nicolo, B., Pani, L., y Pozzo, E., “Strain of concrete at peak compressive stress for a wide range of compressive strengths”, *Materials and Structures*, Vol 27 (1994): 206-210.
- Elwood y Eberhard, “Effective Stiffness of Reinforced Concrete Columns”, *ACI Structural Journal*, V. 106, No. 4, July-August (2009): 476-484.
- Fields. K., y Bischoff, P., “Tension Stiffening and Cracking of High-Strength Reinforced Concrete Tension Members”, *ACI Structural Journal*, V. 101, No. 4, July-August (2004): 447-456.

Hines, E., Restrepo, J., y Seible, F., "Force-Displacement Characterization of Well-Confined Bridge-Piers", *ACI Structural Journal*, V. 101, No 4, July-August (2004): 537-548.

Khuntia, M., y Ghosh, S. K., "Flexural Stiffness of Reinforced Concrete Columns and Beams: Analytical Approach," *ACI Structural Journal*, V. 101, No. 3, May-June (2004): 351-363.

Mander, J.B., Priestley, M.J.N. y Park R., "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete," *Journal of the Structural Division*, ASCE, 114:8 (1988): 1804-1826

Panagiotakos, B., y Fardis., M.N., "Deformation of Reinforced Concrete Members at Yielding and Ultimate", *ACI Structural Journal*, Vol 98, No 2, March-April (2001): 135-148

Presland, R., y Restrepo, J., "Seismic Performance of Retrofitted Reinforced Concrete Bridge Piers", Research Report 2001-03, *Department of Civil Engineering, University of Canterbury*, (2001): 513.

Priestley M.J.N., Seible F. y Calvi G.M., *Seismic Design and Retrofit of Bridges*, John Wiley & Sons, 1996

Restrepo, J., Seible, F., Stephan, B., and Schoettler, M., "Seismic Testing of Bridge Columns Incorporating High-Performance Materials," *ACI Structural Journal*, V. 103, No 4, July-Aug. (2006): 496-504.

Restrepo, J. y Rodriguez, M. *Evaluacion de la Rigidez Lateral de columnas de concreto reforzado. Segunda Edicion*", Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, SID 707, 2020.

Restrepo J. y Rodriguez, M. (2021) "*Stiffness Modifiers to Support the Seismic Design of Reinforced Concrete Rectangular Columns*", *Journal of Structural Engineering*, ASCE. Vol 147, No 10. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003123.

Stephan, B., Restrepo, J. y Seibel, F., "Seismic Behavior of Bridge Columns Built Incorporating MMFX Steel", Report No SSRP-2003/09, Department of Structural Engineering, University of California, San Diego, USA, October (2003): 31.

Torres Matos, M., Presland, R.A., Restrepo, J.I., Rodríguez, M. E., Vázquez D.E., "RECT-2013 y CIRC-2013. Manual de usuario, programa para el análisis de secciones circulares de concreto reforzado y presforzado", Instituto de Ingeniería, UNAM, abril 2013.

## Anexos

### APENDICE A: PROCEDIMIENTO DE INTERPOLACIÓN DE DEFORMACIONES EN LA REGION 2

En el análisis de deformaciones en la Región 2, mostrado en el Capítulo 5, se empleó un procedimiento de interpolación para estas deformaciones, el cual fue propuesto por Crisafulli (1997) y se describe a continuación.

La Fig A.1 muestra la curva no lineal  $y=f(x)$ , y los puntos extremos 1 y 2 de esta curva, con coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , respectivamente. La expresión que se propone para esta curva es:

$$y = f(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{\kappa_2 z + z^2}{1 + (\kappa_2 - \kappa_3)z + \kappa_3 z^2} \quad (\text{A.1})$$

donde la variable  $z$  es igual a:

$$z = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{A.2})$$

y los parámetros  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$  son iguales a:

$$\kappa_2 = \frac{\tan \theta_b}{\tan \theta_c} \quad (\text{A.3})$$

$$\kappa_3 = 2 - \frac{\tan \theta_a}{\tan \theta_c} (1 + \kappa_2) \quad (\text{A.4})$$

Donde  $\tan \theta_b$  y  $\tan \theta_b$  son las pendientes en los puntos 1 y 2, respectivamente, ver Fig A.1, y  $\tan \theta_c$  es igual a:

$$\tan \theta_c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{A.5})$$

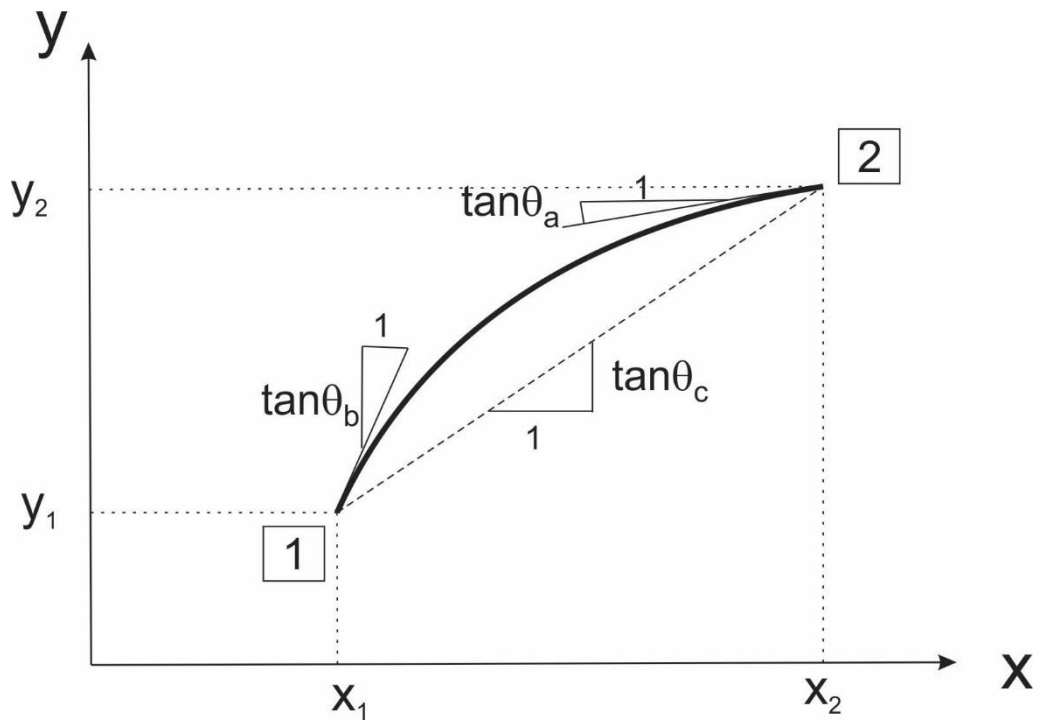


Figura A.1 Curva de interpolación no lineal propuesta (Crisafulli, 2007)



## APENDICE B: EXPRESION PARA DEFINIR LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO Y PARA EL ANGULO $\theta_c$ EN LA REGION 2

En lo que sigue se dan expresiones para definir la profundidad del eje neutro  $c(y)$  y el ángulo  $\theta_c$  en la Región 2, ver Fig B.1.

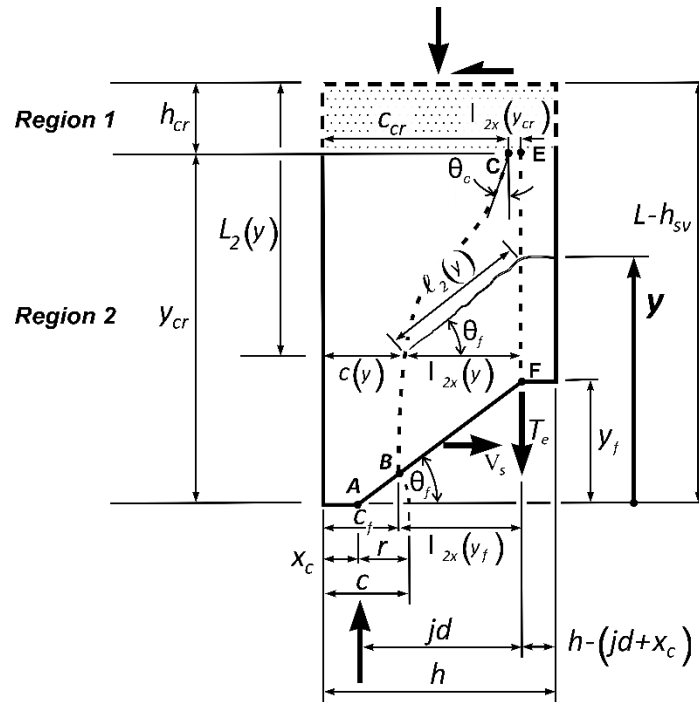


Figura B.1. Detalles de la Región 2

### Expresión para definir la profundidad del eje neutro $c(y)$

Las condiciones de frontera que cumple  $c(y)$  en la Región 2 corresponden a dos ordenadas y dos ángulos en  $y = y_f$  y  $y = y_{cr}$ , Fig B.1:

$$c(y_f) = c_f \quad (\text{B.1})$$

$$c(y_{cr}) = c_{cr} \quad (\text{B.2})$$

$$\left. \frac{dc(y)}{dy} \right|_{y=y_{cr}} = \tan \theta_c \quad (\text{B.3})$$

$$\left. \frac{dc(y)}{dy} \right|_{y=y_f} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Las ecs B.3 y B.4 implican que para  $y = y_{cr}$  la tangente a la curva  $c(y)$  forma el ángulo  $\theta_c$  con el eje longitudinal de la columna y es tangente a este eje para  $y = y_f$ , respectivamente. En lo que sigue, para llegar a una expresión para  $c(y)$  se emplean estas condiciones de frontera y el procedimiento de interpolación mostrado en el Apéndice A.

Empleando la ec A.1 del Apéndice A, la expresión para  $c(y)$  es igual a:

$$y = f(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{\kappa_2 z + z^2}{1 + (\kappa_2 - \kappa_3)z + \kappa_3 z^2} \quad (\text{B.5})$$

donde la variable  $z$  es:

$$z = \frac{y - y_f}{y_{cr} - y_f} \quad (\text{B.6})$$

y los parámetros  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$  son iguales a:

$$\kappa_2 = \frac{\tan \theta_b}{\tan \theta_o} \quad (\text{B.7})$$

$$\kappa_3 = 2 - \frac{\tan \theta_c}{\tan \theta_o} (1 + \kappa_2) \quad (\text{B.8})$$

donde  $\tan \theta_o$  es igual a:

$$\tan \theta_o = \frac{c_{cr} - c_f}{y_{cr} - y_f} \quad (\text{B.9})$$

El parámetro  $\tan \theta_b$  es la pendiente de la curva para  $c(y)$  en  $y = y_f$ , ver Fig B.1, de donde con la ec B.4 se tiene  $\tan \theta_b = 0$ , y por tanto en la ec B.7:

$$\kappa_2 = 0 \quad (\text{B.10})$$

Con el empleo de las ecs B.1, B.2, y B.10, la ec B.5 se expresa como:

$$c(y) = c_f + [c_{cr} - c_f] \frac{z^2}{1 - \kappa_3 z + \kappa_3 z^2} \quad (\text{B.11})$$

Combinando las ecs B.8 y B.10,  $\kappa_3$  es igual a:

$$\kappa_3 = 2 - \frac{y_{cr} - y_f}{c_{cr} - c_f} \tan \theta_c \quad (\text{B.12})$$

### Expresión para definir el ángulo $\theta_c$

En una sección con comportamiento elástico de la columna mostrada en la Fig B.1, a una distancia  $y$  en el sistema de coordenadas mostrada en la Fig B.1, con un momento  $M$  y carga axial  $P$ , el esfuerzo de tracción del concreto en la fibra extrema,  $f_{ct}$ , es igual a:

$$f_{ct} = \frac{M}{I_t} \frac{h}{2} - \frac{P}{A_t} \quad (\text{B.13})$$

La ec B.13 se puede escribir como:

$$f_{ct} = \frac{M}{I_t} \left( \frac{h}{2} - \frac{P}{M} \frac{I_t}{A_t} \right) \quad (\text{B.14})$$

Dada la distribución de esfuerzos lineales en el estado elástico de la sección, de la ec B.14 se infiere que esta distribución tiene una pendiente igual a  $\frac{M}{I_t}$  y que el esfuerzo en tracción  $f_{ct}$

se ubica a una distancia  $\left( \frac{h}{2} - \frac{P}{M} \frac{I_t}{A_t} \right)$  del eje neutro, con lo cual el valor de la profundidad del eje neutro  $c(y)$  es igual a:

$$c(y) = h - \left( \frac{h}{2} - \frac{P}{M} \frac{I_t}{A_t} \right) \quad (\text{B.15})$$

Con el empleo del radio de giro de la sección transformada  $r_t$ , la ec B.15 se escribe en la forma

$$c(y) = h - \left( \frac{h}{2} - \frac{P}{M} r_t^2 \right) \quad (\text{B.16})$$

El momento  $M$  en la sección en estudio es igual al producto del cortante  $V_{\eta_{max}}$  en el extremo libre de la columna por la distancia de la sección a este punto, de acuerdo con la Fig B.1 esta distancia es  $(L - h_{sv} - y)$ , es decir:

$$M = V_{\eta_{max}} (L - h_{sv} - y) \quad (\text{B.17})$$

Combinando las ecs B.16 y B.17 se obtiene:

$$c(y) = \frac{h}{2} + \frac{P r_t^2}{V_{\eta max}(L - h_{sv} - y)} \quad (\text{B.18})$$

Derivando  $c(y)$  respecto a  $y$ :

$$\frac{d c(y)}{dy} = \frac{P r_t^2}{V_{\eta max}(L - h_{sv} - y)^2} \quad (\text{B.19})$$

De la Fig B.1 se tiene

$$h_{cr} = L - h_{sv} - y_{cr} \quad (\text{B.20})$$

De las ecs B.19 y B.20:

$$\tan \theta_c = \left. \frac{d c(y)}{dy} \right|_{y=y_{cr}} = \frac{P r_t^2}{V_{\eta max} h_{cr}^2} \quad (\text{B.21})$$

donde

$$V_{\eta max} = \frac{\eta M_{max}}{L} \quad (\text{B.22})$$

## APENDICE C: PROCEDIMIENTO PARA EL COMPUTO DE $\theta_f$

En el Capítulo 5 se mostró que el cómputo del parámetro  $\theta_f$  tiene que llevarse a cabo con un procedimiento iterativo. Se demostró que  $\theta_f$  es función de  $y_f$  (ec 5.57) y que este parámetro depende del valor de la fuerza cortante ( $V_4$ ) resistida por la contribución del refuerzo transversal en la altura de columna igual a  $y_f - r \text{ sen } \theta_f$ , Fig 5.14. Por conveniencia esta Figura se repite en este Apéndice como Fig C.1. La solución de  $\theta_f$  o  $y_f$  se obtiene con un procedimiento iterativo resolviendo las ecs. 5.76 y 5.81. En este Apéndice la ec. 5.76 se repite como ec. C.1, y la ec. 5.81 se repite como ec. C.2.

$$V_4 = v_{e2} \frac{A_{ht}}{s} f_{st}(y_f)(y_f - r \text{ sen } \theta_f) \quad (\text{C.1})$$

$$f_{st}(y_f) = \frac{3s}{v_{e1} A_{ht} y_f^2} \left( V_4 \beta_4 y_f + \frac{2}{3} V_{max} h_{sv} \right) \quad (\text{C.2})$$

Antes de mostrar el procedimiento seguido para la solución de  $\theta_f$ , en lo que sigue se muestra el estudio paramétrico llevado a cabo para definir los parámetros  $v_{e2}$  y  $\beta_4$  que intervienen en las ecs C.1 y C.2, respectivamente.

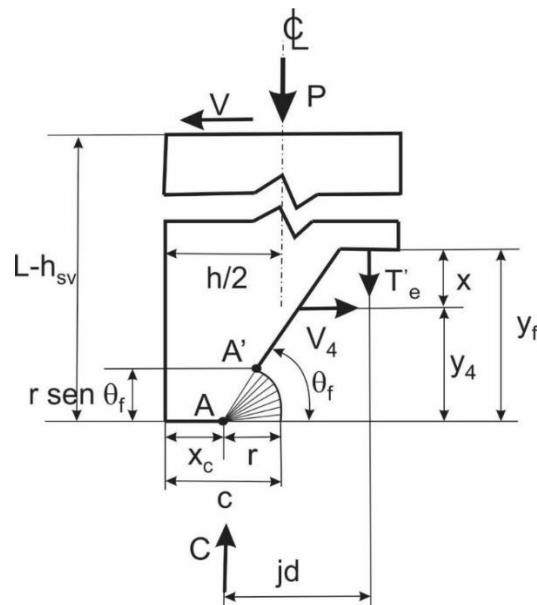


Fig C.1 Geometría y fuerzas actuantes en la Región 3.

### Estudio paramétrico para definir el parámetro $v_{e2}$ en columnas circulares

El diferencial de fuerza cortante  $dV_4(y)$  que resiste la Región 3 en la ordenada  $y$ , Fig C.2, se obtiene como:

$$\frac{1}{2}dV_4(y) = \frac{A_{ht} f_{st}(y)}{2s} \cos \beta(y) dy \quad (C.3)$$

Considerando que el radio  $r$  de la zona rígida de la Región 3 es igual a  $c-x_c$ , y que la fuerza cortante  $V_4$  es resistida en la altura de columna  $y_f - r \text{ sen } \theta_f$ , Figs C.1 y C.2,  $V_4$  se obtiene integrando la ec C.3:

$$V_4 = \frac{A_{ht}}{s} \int_{r \text{ sen } \theta_f}^{y_f} f_{st}(y) \cos \beta(y) dy \quad (C.4)$$

Se acepta la hipótesis de que en la zona en estudio la variación del esfuerzo en el refuerzo transversal es lineal, ver Fig C.3, donde para  $y = r \text{ sen } \theta_f$ ,  $f_{st}(y)=0$ , y para  $y = y_f$ ,  $f_{st}(y) = f_{st}(y_f)$ . De estas hipótesis se obtiene que el esfuerzo  $f_{st}(y)$  en la ordenada  $y$  es igual a:

$$f_{st}(y) = \frac{y - r \text{ sen } \theta_f}{y_f - r \text{ sen } \theta_f} f_{st}(y_f) \quad (C.5)$$

De las ecs 5.59 y 5.61 se obtiene:

$$v_{e1} = \cos \beta(y) = \sqrt{1 - \left( \frac{x_c + jd - 0.5h}{0.5h_o} \right)^2} \quad (C.6)$$

Combinando las ecs C.4 a C.6 se obtiene:

$$V_4 = \frac{v_{e1} A_{ht}}{s} f_{st}(y_f) \int_{r \text{ sen } \theta_f}^{y_f} f(y) dy \quad (C.7)$$

donde

$$f(y) = \frac{y - r \text{ sen } \theta_f}{y_f - r \text{ sen } \theta_f} \quad (C.8)$$

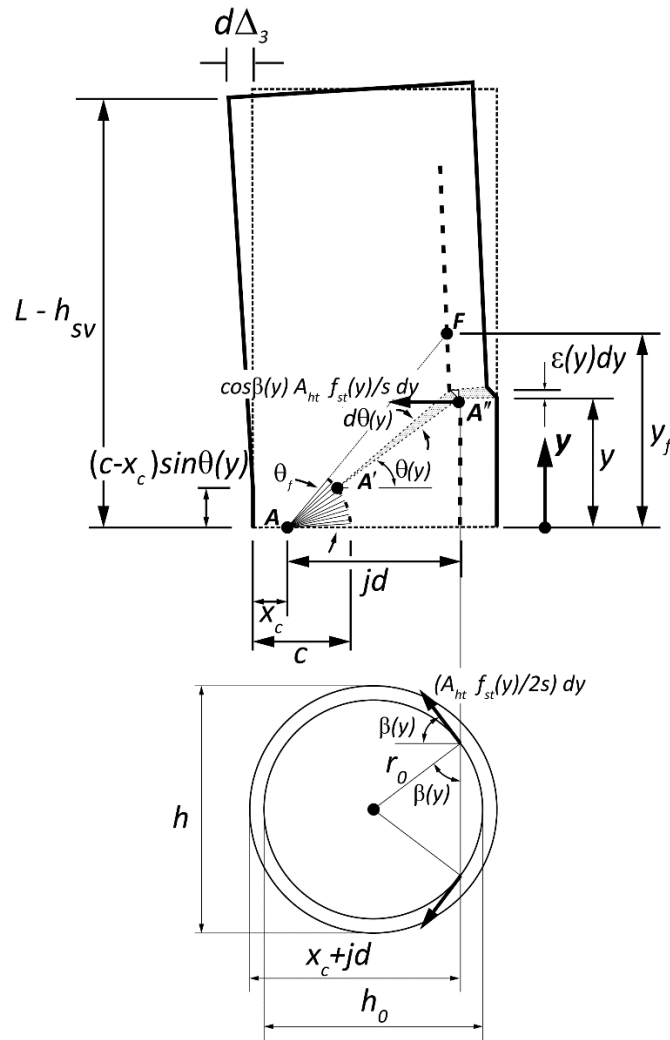


Figura C.2 Fuerzas efectivas que resisten el cortante en una sección circular, (a) Elevacion, (b) Sección transversal

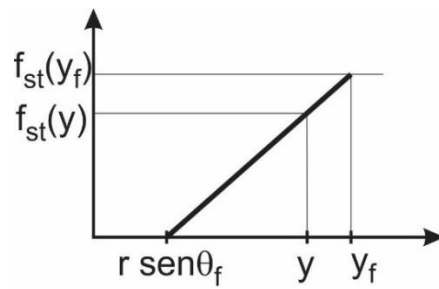


Figura C.3 Variación lineal del esfuerzo  $f_{st}(y)$  del refuerzo transversal en la Región 3.

La solución de la ec C.7 se llevó a cabo empleando el método de integración numérica de la cuadratura de Gauss-Lobatto. En este método la integral de la función  $f(y)$  en la ec C.7, se resuelve como:

$$\int_a^b f(y) dy = m \sum_{i=1}^3 w_i f(c + m t_i) \quad (\text{C.9})$$

donde

$$a = r \operatorname{sen} \theta_f \quad (\text{C.10})$$

$$b = y_f \quad (\text{C.11})$$

$$c = (a + b)/2 = 0.5 (r \operatorname{sen} \theta_f + y_f) \quad (\text{C.12})$$

$$m = (b - a)/2 = 0.5 (y_f - r \operatorname{sen} \theta_f) \quad (\text{C.13})$$

y

$$t_1 = -1 \quad w_1 = 1/3 \quad (\text{C.14})$$

$$t_2 = 0 \quad w_2 = 4/3 \quad (\text{C.15})$$

$$t_3 = 1 \quad w_3 = 1/3 \quad (\text{C.16})$$

La ec C.9 también se puede expresar como:

$$\int_a^b f(y) dy = m (T_1 + T_2 + T_3) \quad (\text{C.17})$$

donde

$$T_1 = w_1 f(c + m t_1) \quad (\text{C.18})$$

$$T_2 = w_2 f(c + m t_2) \quad (\text{C.19})$$

$$T_3 = w_3 f(c + m t_3) \quad (\text{C.20})$$

a) Cálculo de  $T_1$

$$f(c + m t_1) = f(0.5 (r \operatorname{sen} \theta_f + y_f) - 0.5 (y_f - r \operatorname{sen} \theta_f)) = f(r \operatorname{sen} \theta_f) \quad (\text{C.21})$$

De las ecs C.8, C.14, C.18 y C.21:

$$T_1 = \frac{1}{3} f(c + m t_1) = \frac{1}{3} f(r \operatorname{sen} \theta_f) = \frac{1}{3} \frac{(r \operatorname{sen} \theta_f - r \operatorname{sen} \theta_f)}{(y_f - r \operatorname{sen} \theta_f)} = 0 \quad (\text{C.22})$$



b) Cálculo de  $T_2$

$$f(c + mt_2) = f(0.5(r \operatorname{sen} \theta_f + y_f)) = \frac{0.5(r \operatorname{sen} \theta_f + y_f) - r \operatorname{sen} \theta_f}{y_f - r \operatorname{sen} \theta_f} = 0.5 \quad (\text{C.23})$$

Reemplazando las ecs C.15 y C.23 en la ec C.19:

$$T_2 = w_2 f(c + mt_2) = \frac{4}{3} 0.5 = \frac{2}{3} \quad (\text{C.24})$$

c) Cálculo de  $T_3$

$$f(c + mt_3) = f(0.5(r \operatorname{sen} \theta_f + y_f) + 0.5(y_f - r \operatorname{sen} \theta_f)) = f(y_f) = \frac{y_f - r \operatorname{sen} \theta_f}{y_f - r \operatorname{sen} \theta_f} = 1 \quad (\text{C.25})$$

Reemplazando las ecs C.16 y C.25 en la ec C.20:

$$T_3 = \frac{1}{3} (1) = \frac{1}{3} \quad (\text{C.26})$$

En la ec C.17 se reemplaza el valor de  $m$  dado por la ec C.13, y los valores de  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  dados por las ecs C.22, C.24 y C.26, respectivamente, se tiene:

$$\int_{r \operatorname{sen} \theta_f}^{y_f} f(y) dy = m(T_1 + T_2 + T_3) = 0.5(0 + y_f - r \operatorname{sen} \theta_f) \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = 0.5(y_f - r \operatorname{sen} \theta_f) \quad (\text{C.27})$$

Reemplazando la ec C.27 en la C.7 se tiene:

$$V_4 = 0.5 \frac{v_{e1} A_{ht}}{s} f_{st}(y_f) (y_f - r \operatorname{sen} \theta_f). \quad (\text{C.28})$$

Despejando el parámetro  $v_{e2}$  de la ec C.1:

$$v_{e2} = \frac{V_4}{\frac{A_{ht}}{s} f_{st}(y_f) (y_f - r \operatorname{sen} \theta_f)} \quad (\text{C.29})$$

De las ecs C.28 y C.29:

$$v_{e2} = 0.5 v_{e1} \quad (\text{C.30})$$

**Estudio paramétrico para definir el parámetro  $\beta_4$  en columnas circulares**

En el Capítulo 5,  $\beta_4$  se definió como:

$$\beta_4 = \frac{y_4}{y_f} \quad (\text{C.31})$$

El parámetro  $y_4$  es el brazo de palanca de la fuerza cortante  $V_4$  respecto al punto A, Fig C.1. El parámetro  $y_4$  se define en función del momento  $M_4$  como, Fig C.1:

$$y_4 = \frac{M_4}{V_4} \quad (\text{C.32})$$

Dado que la ec C.1 nos permite conocer  $V_4$ , para obtener  $y_4$  de la ec C.32 faltaría contar con una expresión para el momento  $M_4$ , la que se obtiene en lo que sigue. El diferencial de momento  $dM_4$  es igual a, Fig C.2:

$$dM_4 = y dV_4(y) \quad (\text{C.33})$$

Considerando  $v_{e1} = \cos\beta(y)$ , y combinado las ecs C.3 y C.33 se obtiene:

$$dM_4 = y \frac{v_{e1} A_{ht}}{s} f_{st}(y) dy \quad (\text{C.34})$$

Reemplazando la ec. C.5 en la ec C.34 é integrando:

$$M_4 = \frac{v_{e1} A_{ht}}{s} f_{st}(y_f) \int_{r \text{ sen } \theta_f}^{y_f} f(y) dy \quad (\text{C.35})$$

donde

$$f(y) = y \frac{y - r \text{ sen } \theta_f}{y_f - r \text{ sen } \theta_f} \quad (\text{C.36})$$

La solución de la ec C.35 se obtiene resolviendo la integral en esta ecuación, para lo cual se emplea el método de integración Gauss-Lobatto mostrado en detalle en este Apéndice para obtener  $v_{e2}$ . Esto implica resolver las ecs C.17 a C.20, donde  $f(y)$  se define en la ec C.36, los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $m$  se definen en las ecs C.10 a la C.13, y los parámetros  $t_i$  y  $w_i$  se definen en las ecs C.14 a la C.16. Con este procedimiento se obtiene:

$$c = 0.5(y_f + r \text{ sen } \theta_f)$$

$$m = 0.5(y_f - r \text{ sen } \theta_f)$$

$$T_1 = \frac{1}{3} f(r \operatorname{sen} \theta_f) = \frac{1}{3} (0) = 0 \quad (\text{C.37})$$

$$T_2 = \frac{4}{3} f(0.5(r \operatorname{sen} \theta_f + y_f)) = \frac{1}{3} (r \operatorname{sen} \theta_f + y_f) \quad (\text{C.38})$$

$$T_3 = \frac{1}{3} f(y_f) = \frac{1}{3} y_f \quad (\text{C.39})$$

Reemplazando las ecs C.37 a la C.39 en la ec C.17,

$$\int_a^b f(y) dy = m(T_1 + T_2 + T_3) = 0.5(y_f - r \operatorname{sen} \theta_f) \left( \frac{1}{3}(r \operatorname{sen} \theta_f + y_f) + \frac{1}{3} y_f \right) = \frac{1}{6}(y_f - r \operatorname{sen} \theta_f)(2y_f + r \operatorname{sen} \theta_f) \quad (\text{C.40})$$

combinado la ec C.35 para  $M_4$  y la ec. C.40 se obtiene:

$$M_4 = \frac{v_{e1} A_{ht}}{6s} f_{st}(y_f)(y_f - r \operatorname{sen} \theta_f)(2y_f + r \operatorname{sen} \theta_f) \quad (\text{C.41})$$

El parámetro  $y_4$  se obtiene reemplazando las ecs C.1 y C.41 en la ec C.32.

$$y_4 = \frac{M_4}{V_4} = \frac{v_{e1}}{6v_{e2}} (2y_f + r \operatorname{sen} \theta_f) \quad (\text{C.42})$$

Este valor de  $y_4$  dividido entre  $y_f$  es el parámetro  $\beta_4$  (ec C.31):

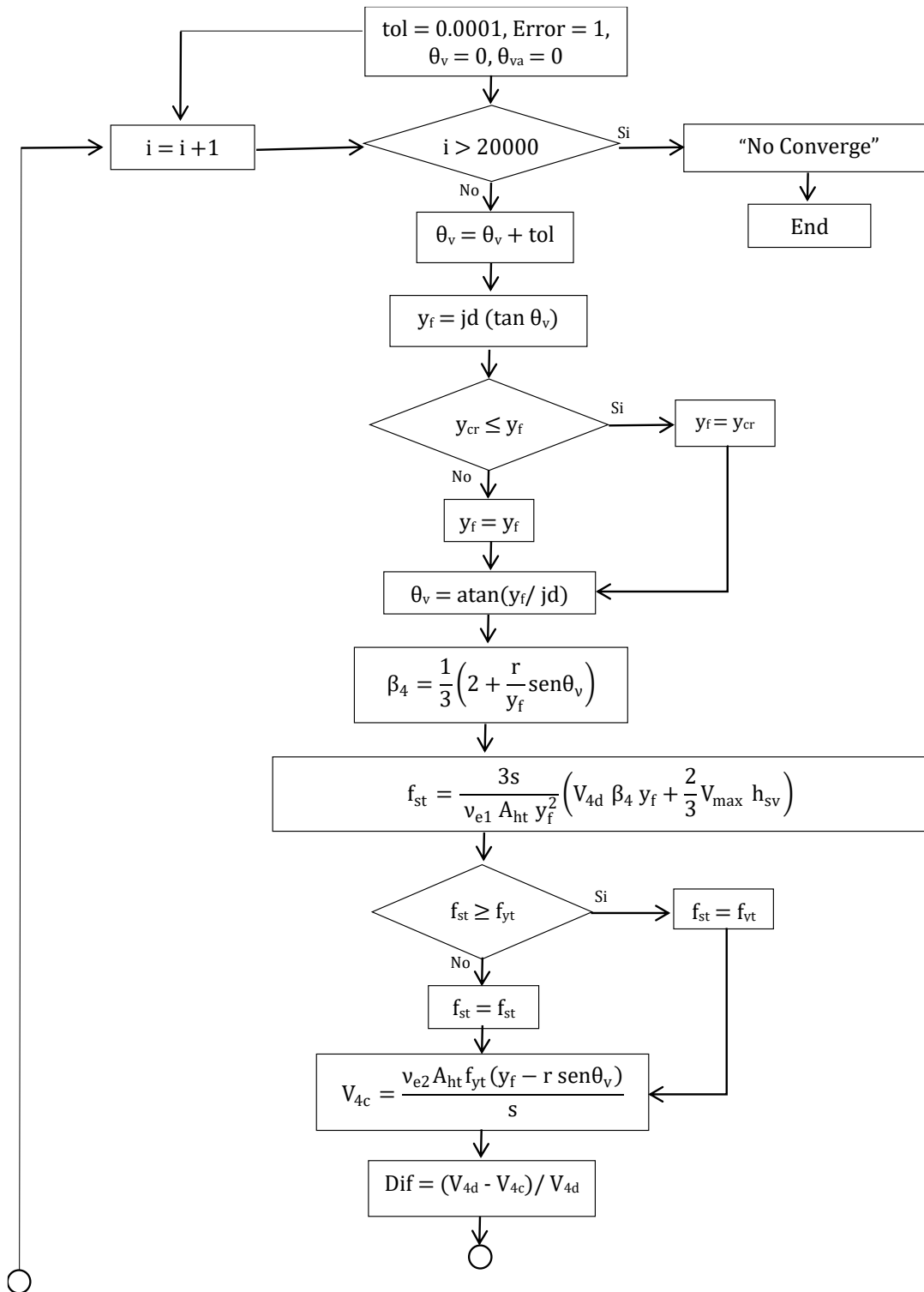
$$\beta_4 = \frac{y_4}{y_f} = \frac{v_{e1}}{6v_{e2}} \left( 2 + \frac{r \operatorname{sen} \theta_f}{y_f} \right) \quad (\text{C.43})$$

Reemplazando en la ec C.43 la relación entre  $v_{e1}$  y  $v_{e2}$  dada por la ec. C.30 se tiene:

$$\beta_4 = \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{r \operatorname{sen} \theta_f}{y_f} \right) \quad (\text{C.44})$$

**Programa de cómputo empleado para resolver las ecs C.1 y C.2**

Las ecs C.1 y C.2 se resolvieron con un programa de cómputo empleando un procedimiento iterativo, en el cual se buscaba el valor de  $\theta_f$  que llevar a cumplir con las ecs C.1 y C.2. Este programa fue empleando Visual Basic para Excel, siguiendo el diagrama de flujo que se muestra en la Fig C.4.



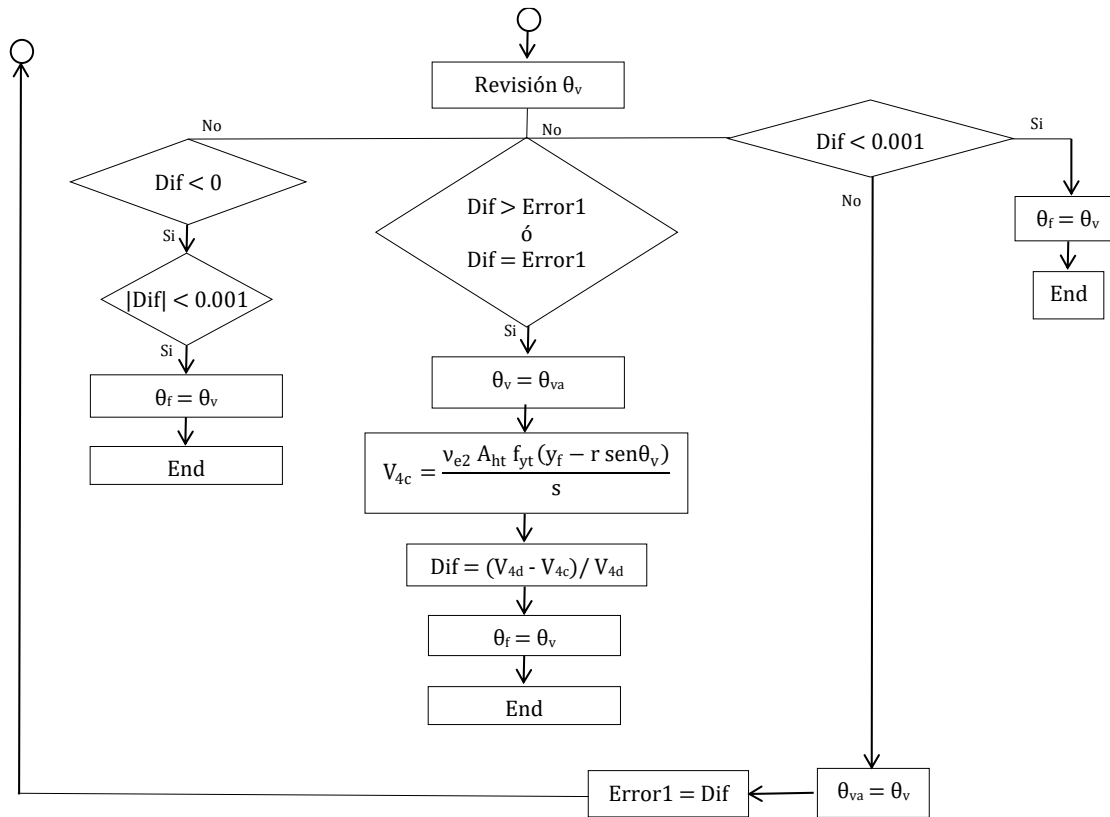


Figura C.4 Diagrama de flujo para encontrar  $\theta_f$

Los listados de los programas Visual Basic para Excel, con los pasos mostrados en la Fig C.4, para columnas de sección circular y rectangular, Tetaf\_C y Tetaf\_R, respectivamente, se muestran en lo que sigue.

Public Function tetaf\_c (L As Double, h As Double, D1 As Double, hsv\_Div\_h As Double, ycr As Double, Aht As Double, s As Double, fyt As Double, x\_c\_Div\_h As Double, c\_Div\_h As Double, jd\_h As Double, V\_max As Double, P As Double, tol As Double)

Dim Nu\_e2 As Double

Dim eta As Double

Dim ho As Double "Se usa solo en col Circ

Dim hsv As Double

Dim jd As Double

Dim x\_c As Double

Dim c As Double

Dim r As Double

Dim V\_4d As Double

Dim a1 As Double

Dim Nue1 As Double

Dim i As Double

Dim tetav As Double

Dim yf As Double

Dim Beta4 As Double

Dim fst As Double

Dim V\_4c As Double

Dim Delta As Double

Dim Dif As Double

Dim Nmax As Double

Dim tetav\_anterior As Double

Dim Error\_1 As Double

eta = 2 / 3

ho = D1 "Se usa solo en Col Circ

hsv = hsv\_Div\_h \* h

jd = jdh \* h

x\_c = x\_c\_Div\_h \* h

c = c\_Div\_h \* h

r = c - x\_c

V\_4d = eta \* V\_max - ((P \* (0.5 \* h - x\_c)) / L)

a1 = -r / jd

Nue1 = (1 / (0.5 \* ho)) \* (0.25 \* ho ^ 2 - (x\_c + jd - (0.5 \* h)) ^ 2) ^ 0.5

Nu\_e2 = 0.5 \* Nue1

104

Delta = 0.001

Nmax = 20000

tetav = 0

tetav\_anterior = 0

Error\_1 = 1

For i = 0 To Nmax

    If i >= 20000 Then

        tetaf\_c = "Num max de iteraciones"

        GoTo 20

    End If

    tetav = tetav + tol

    yf = jd \* Tan(tetav)

    If ycr < yf Then

        yf = ycr

    End If

    tetav = Atn(yf / jd)

    Beta4 = (1 / 3) \* (2 + r \* Sin(tetav) / yf)

    fst = ((3 \* s) / (Nue1 \* Aht \* yf ^ 2)) \* (V\_4d \* Beta4 \* yf + eta \* V\_max \* hsv)

    If fst > fyt Then

        fst = fyt

    End If

    V\_4c = (Nu\_e2 \* Aht \* fst \* (yf - r \* Sin(tetav))) / s

    Dif = (V\_4d - V\_4c) / V\_4d

    If Dif < 0 Then

        If Abs(Dif) < Delta Then

            tetaf\_c = tetav

            GoTo 20

        End If



```
ElseIf Dif > Error_1 Or Dif = Error_1 Then
    tetav = tetav_anterior
    V_4c = (Nu_e2 * Aht * fst * (yf - r * Sin(tetav))) / s
    Dif = (V_4d - V_4c) / V_4d
    tetaf_c = tetav
    GoTo 20
Else
    If Dif < Delta Then
        tetaf_c = tetav
        GoTo 20
    Else
        GoTo 10
    End If
End If
10
tetav_anterior = tetav
Error_1 = Dif
Next i
20 End Function
```