

Aplicación de FeynCalc en un problema Semi-Clásico: Un nuevo aporte de conectividad entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica

Martín Pomares C¹.

<http://orud.org/0000-0003-4994-0573>

Abstract

Feynman's diagrams are a good symbolic tool for the calculation of path integrals in elementary particle physics. Therefore, currently in physics there is an interest to apply quantum mechanics to classical mechanics. It implies that is important also contribute to the development of the theory of path integrals applied to problems of classical mechanics which this is one of the first works in that approach. This kind of research works in theoretical physics is a basis to study the application of Feynman's diagrams as a way of symbolic algebra to solve problems of classical interactions as if it were of the quantum. In that sense, the author has regarded in basic way the application of the computational tool as FeynCalc, supported by Mathematic 8.0. As a consequence, FeynCalc was used to simulate a semi classical problem with an equivalent of a quantum representation. And the only regarded aspect of representing a classical problem into the quantum approach, this research contributes to a symbolic representation of the physics, where some classical problem can be solved regarding quantum mechanism.

Resumen

Los diagramas de Feynman son una herramienta simbólica para el cálculo de integrales de camino en física de partículas elementales. Sin embargo, actualmente en la física hay un interés en estudiar la aplicación de la mecánica cuántica a problemas de la mecánica clásica, lo que implica que es importante contribuir con el desarrollo en la aplicación de la teoría de integrales de camino de Feynman a problemas clásicos por lo cual este es uno de los primeros trabajos en esa área. Este tipo de trabajos de investigación en la física teórica son una base para estudiar la aplicación de los diagramas de Feynman como una forma de algebra simbólica para resolver problemas de interacción clásicos mediante aspectos cuánticos. En ese sentido, hemos abordado en forma básica la aplicación de una herramienta de la Física de Partículas como lo es FeynCalc (Software de cálculo de diagramas de Feynman) soportado en Mathematica 8.0. Por lo consiguiente se pretende usar dicha herramienta para el modelamiento de una interacción semiclásica con representación equivalente cuántica. El sólo considerar este nuevo aspecto de conectividad entre lo clásico y lo cuántico mediante una representación simbólica permitirá contribuir con el desarrollo de la física teórica a nuevos horizontes de representación de problemas clásicos tratados desde el punto de vista cuántico.

Palabras claves: Lagrangiano, integrales de camino de Feynman, FeynCalc, FeynArt.

1. Introducción

En física de partículas, los diagramas de Feynman son una herramienta simbólica para el cálculo de integrales de camino en física de partículas elementales, así como para estudiar la interacción entre partículas elementales como consecuencia de su colisión. Sin embargo, aunque en la física se ha venido estudiando la aplicación de la mecánica cuántica a problemas de la mecánica clásica. Aún no hay estudios que utilicen los diagramas de Feynman para estudiar interacciones clásicas. Por lo tanto, el presente estudio pretende contribuir con el conocimiento científico mediante la aplicación de las integrales de camino y los diagramas de Feynman en el estudio de problemas clásicos mediante un equivalente cuántico. Por lo tanto, este tipo de trabajos dentro de la JUDC representan una semilla de

¹ Researcher at Physics Department, UNAN-Managua. mpomares@unan.edu.ni; stringnoide@gmail.com

futuros trabajos de investigación de la física teórica en Nicaragua dentro de los cuales se pretende explorar nuevos métodos fisicomatemático para la aplicación de los diagramas de Feynman como una forma de algebra simbólica para representar problemas de interacción clásicos mediante aspectos cuánticos. Se pretende estudiar los problemas semiclásicos mediante la básica aplicación de una herramienta de la física de partículas como lo es *FeynCalc* (Software de cálculo de diagramas de Feynman) soportado en *Mathematica 8.0*. El considerar la conectividad entre lo clásico y lo cuántico mediante una representación simbólica permitirá contribuir con el desarrollo de la física teórica a nuevos horizontes. Parte de esos horizontes es que los diagramas de Feynman que representan ecuaciones sean una nueva metodología de visualización de interacciones lo que podrá ser una base para el desarrollo de lo que podría ser una física simbólica.

El presente trabajo de investigación tiene por objetivos: (i) contribuir con la aplicación de la física teórica basada en los fundamentos de diagramas de Feynman al estudio de un problema semi clásico, (ii) aplicar el software FeynCalc soportado sobre el software Mathematica como herramienta para la aplicación y simulación de problemas de la mecánica clásica bajo un tratamiento de la mecánica cuántica, (iii) desarrollar una metodología de simulación que permita ser la base para estudiar sistemas clásicos mediante formalismos cuánticos, (iv) estudiar el problema semiclásico del oscilador armónico como una primera aproximación o ventana entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica, para lo cual se desplegará un diagrama topológico de acuerdo al lagrangiano propuesto basado en FeynCalc.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. FeynCalc

FeynCalc es un paquete de *Mathematica* diseñado por R. Mertig con el propósito de realizar cálculos algebraicos en física de altas energías. Este provee herramientas para manipulaciones de Lorentz, manipulaciones del algebra de Dirac, cálculos de factor de color, derivación de reglas de Feynman, cálculo de integrales de camino de Feynman (por ejemplo, reducción del tipo Passarino-Veltman) y algebra no-conmutativa, así como también tabulaciones de integrales de parámetros de Feynman, transformadas de Mellin, convoluciones, lagrangianos y reglas de Feynman. Así mismo, permite traducciones que son provistas para cambiar la sintaxis de FeynCalc a la sintaxis de FORM para generar códigos en FORTRAN. Junto a FeynCalc, se utiliza FeynArts para dibujar los diagramas de Feynman (Hahn, Th., 2000; Kumerički, Krěsimir., 2001).

Muchas de las aplicaciones han sido discutida en física de altas energía por Ziella D. H. (2008), Kumerički, Krěsimir. (2001), y principalmente en la tesis doctoral de Thomas Hahn (2000).

2.2. El formalismo de los diagramas de Feynman (Eck, H.,1995)

El método de los diagramas de Feynman es un proceso de dos pasos: (1) extraer el conjunto de *reglas de Feynman* (RF) del lagrangiano el cual describe un cierto modelo físico, (2) aplicar las RF para calcular la transición de probabilidades entre dos estados mecánico-cuánticos.

2.2.1. El origen de las reglas de Feynman

La amplitud de transición entre dos estados mecánico-cuántico ξ y ψ está dada por la famosa integral de camino de Feynman:

$$\langle \xi | \psi \rangle \equiv \int_C \mathbf{D}\varphi e^{-\frac{i}{\hbar}S[\varphi]} \quad [1]$$

La cual puede representarse en dependencia de las coordenadas generalizadas como

$$\langle q_k, t', \dots | q_j, t \rangle \equiv N \int_C \mathbf{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right] \quad [2]$$

La amplitud de transición para el vacío-vacío en presencia de una fuente externa j se describe por $Z[j]$ expresada como

$$\langle 0|0\rangle_j \equiv Z[j] \equiv \int_C \mathbf{D}\varphi e^{i \int dx (\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) + j\varphi)} \quad [3]$$

el cual está relacionado al funcional generatriz de la función de Green $T[j]$:

$$T[j] = \frac{Z[j]}{Z[0]} \quad [4]$$

Separando el lagrangiano libre del lagrangiano de la interacción tendremos: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, es posible reescribir $Z[j]$ como

$$\begin{aligned} Z[j] &= e^{i \int dx \mathcal{L}_I\left(\frac{1}{i\delta_j(x)}\right)} \int_C \mathbf{D}\varphi e^{i \int dx (\mathcal{L}_0(\varphi, \partial\varphi) + j\varphi)} \\ &= e^{i \int dx \mathcal{L}_I\left(\frac{1}{i\delta_j(x)}\right)} e^{\frac{i}{2} \int dx dx' j(x)\Delta(x-x')j(x')} \end{aligned} \quad [5]$$

donde $\Delta(x - x')$ es el propagador del campo φ definido por el inverso del lagrangiano libre \mathcal{L}_0 , el cual es parte de \mathcal{L} que es el cuadrático en φ .

Expandiendo el primer exponencial en la ecuación [5] y tomando la derivada del funcional con respecto a las fuentes externas j nos da la serie de perturbación para la probabilidad de transición. Las reglas de Feynman son un conjunto de reglas para construir los elementos de la serie directamente y pueden ser derivadas de la ecuación [5]. Debe ser mencionado que el punto n de la función de Green $G(x_1, \dots, x_n)$ puede ser calculado como

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int dy_1 \dots dy_p \langle 0 | \mathbf{T}[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \mathcal{L}_I(y_1) \dots \mathcal{L}_I(y_p)] | 0 \rangle \quad [6]$$

En esta ecuación \mathbf{T} denota el producto ordenado del tiempo y los campos libres $\varphi(x_i)$ (solución de la ecuación del movimiento del lagrangiano \mathcal{L}_0). Cada diagrama de Feynman construido por las reglas corresponde a un elemento de la suma originando de la ecuación [6] al aplicar el teorema de Wick, aplicado a ciertas contracciones de la serie de Wick de los elementos de la matriz dentro de la integral de la ecuación [6].

El lagrangiano más general se escribe de la forma

$$\mathcal{L} = f \varphi_i(x) h_{ij} \varphi_j(x) + \mathcal{L}_I(\varphi) \quad [7]$$

donde φ es el campo real o complejo, y h_{ij} es operador matricial que puede generar derivadas de los campos y de las transformadas de Fourier del cual debe tener una inversa; $f = 1/2$ se designa para los campos reales y $f = 1$ para los campos complejos. El campo puede ser de cualquier tipo (escalar, espinor, vectorial, tensorial, ...) y los índices denotan el conjunto completo de índices de cualquier tipo de éstos campos.

El lagrangiano de interacción \mathcal{L}_I es un polinomio en los campos y algunos coeficientes de acople los cuales dependen de los índices de los campos y pueden contener derivadas del i -ésimo campo $\partial_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$. Por lo tanto, un término del lagrangiano de interacción es de la forma $\mathcal{L}_I(x) = \alpha_{i_1 \dots i_n} (\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_n}) \varphi_{i_1}(x) \dots \varphi_{i_n}(x)$, el cual es suficientemente general para convertir todos los tipos de teorías de campos renormalizables y campos efectivos.

2.2.2. Propagadores y vértices

El propagador de un campo φ es definido como el inverso de la transformada de Fourier del operador matricial h_{ij} de la ecuación [6]:

$$\Delta_{ij}(k) = i[h(k)]_{ij}^{-1} \quad [8]$$

El factor de vértice corresponde al acoplamiento en [8] es la transformada de Fourier de los coeficientes de acople:

$$\mathbf{C}(\varphi_{i_1}(k_1), \dots, \varphi_{i_n}(k_n)) = (2\pi)^4 i \sum_{\{1, \dots, n\}} (-1)^P \alpha_{i_1 \dots i_n}(-ik_1, \dots, -ik_n) \delta^4(k_1 + \dots + k_n) \quad [9]$$

Donde la suma corre sobre todas las permutaciones de los índices y P denota el signo de una permutación de campos anti-conmutables entre los φ_i . Usualmente incluye factores en la definición de \mathcal{L}_I de tal manera que los factores que surgen de la suma sobre todas las permutaciones, por ejemplo, $\mathcal{L}_I(x) = \frac{1}{3!} g \phi(x)^3 \rightarrow \mathbf{C}(\phi^3) = (2\pi)^4 i g \delta(k_1 + k_2 + k_3)$.

2.2.3. Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman se resumen para un modelo a como se define por la ecuación [7] y [8]. Además la definición de los propagadores y factores de vértice implícitamente fijando el campo contenido de la teoría y los posibles acoplamientos entre campo de los cuales no hay dependencia sobre el modelo en sí. Estas reglas de Feynman generan las expresiones analíticas para la Matriz-S de momentum-espacio de un proceso involucrando n campos externos. Las expresiones son de l -ésimo orden de expansión de perturbaciones. Mes un conjunto de enteros dando el posible número de campos que se acoplan uno con otro, por ejemplo, los posibles grados de acople del modelo.

Dibujar todas las gráficas topológicamente con n puntos externos, l lazos y un número arbitrario de vértices los cuales tienen un número adyacencias que es un elemento de \mathbf{M} .

Completar las líneas de topologías con campos del lagrangiano en todos los posibles caminos tales que (Kumerički, Krěsimir., 2001).

Líneas externas que transportan a los campos externos de los procesos

Solamente las combinaciones de campo de los términos de interacción acurren en los vértices.

Para los campos que no son idénticos a los campos de carga conjugada deben usar líneas continuas.

Traducir los resultados gráficos a expresiones analíticas:

En la presencia de los campos fermiónicos, arreglar los propagadores y vértices en propio orden. Escribir las expresiones analíticas del propagador y los factores del vértice para todas las líneas y puntos de la topología. Para los campos con líneas externas insertar el correspondiente espinor o vector de polarización.

Multiplicar las expresiones resultantes por el peso combinatorio de la topología, por un factor de (-1) para cada lazo cerrado de campos de Grassman-valuados y por el factor $(-1)^{P_F}$ con P_F siendo el signo de permutación de campos de fermiones externos (se está presente).

Sumar todas las expresiones. El peso combinatorio depende de la simetría de la topología.

2.3. Aspectos de instalación en Mathematica 8.0:

En la carpeta donde está instalado Mathematica 8.0 en el folder AddsOn debe de desempaquetarse el folder HighEnergyPhysics, de tal manera que quede de la siguiente manera:

C:/../Wolfram Research/Mathematica/8.0/AddsOn/Applications/

2.3.1. Para instalación de nuevos paquetes en Mathematica 8.0

En el menú **File** (Fig. 1), encontraremos la selección de instalar nuevos paquetes con el título de “**Install**” (Tal a como se presenta la Fig. 1 con una flecha roja). El cual al oprimir dicha selección se despliega una ventana a como se muestra en la Fig. 2. Escogemos la selección “**Application**”. Escogemos luego la fuente (“**Source**” con la especificación desde un archivo “**File**”). Escogemos el archivo “**FenCalc.m**” y damos “**OK**”. Luego procedemos

con la instalación.

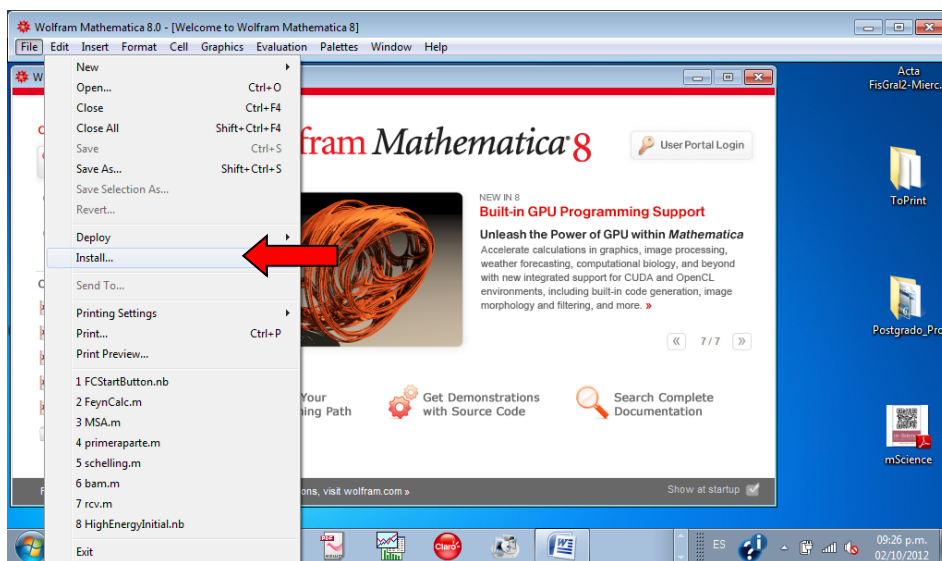


Fig. 1 Esquema general de instalación de nuevos paquetes en Mathematica.

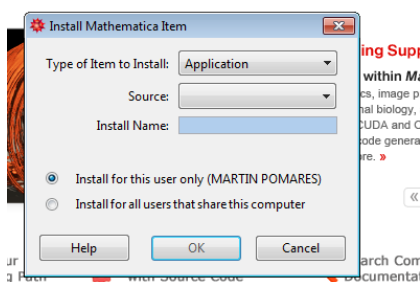


Fig. 2 Opción de instalación de una aplicación

Luego al ir a la ayuda (**Help**), seleccionamos “**Virtual Book**” la cual permitirá que se despliegue la ventana de la izquierda de la Fig.3 denominada **Function Navigator**, de la cual en **Add-Ons** aparecerá el paquete de **High Energy Physcs** el cual corresponde a FeynCalc.

Otra manera de desplegar el notebook de FeynCalc es con el siguiente procedimiento: Ya instalado FeynCalc, puede abrirse el manual desde el archivo en formato de notebook de nombre FCStartButton.nb ubicado en la carpeta:

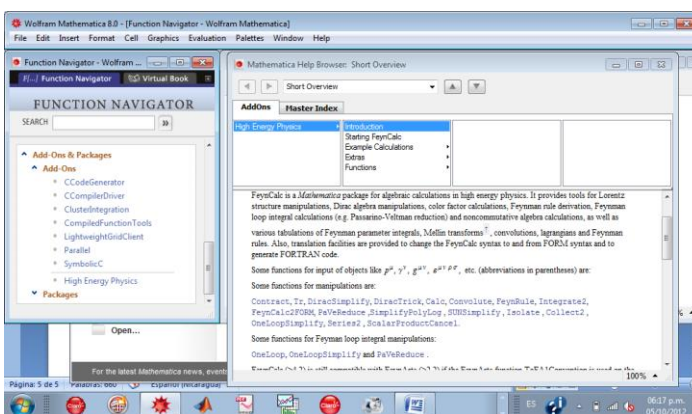


Fig. 3 Esquema general de la ayuda de FeynCalc.

C:/../Wolfram Research/Mathematica/8.0/AddOn/HighEnergyPhysics/Documentation/FCStartButton.nb

Al abrirse el notebook se desplegará una pantalla que con resaltamiento en amarillo dice **Load FeynCalc**. Una vez cargado el notebook aparecerá la pantalla *Untitled-1** que aparece en la Fig. 4. Si se da doble click sobre la selección *open FeynCalcRef8.nb*, se desplegará toda la ayuda y el manual de FeynCalc 8.0, el cual puede ser impreso en formato pdf.

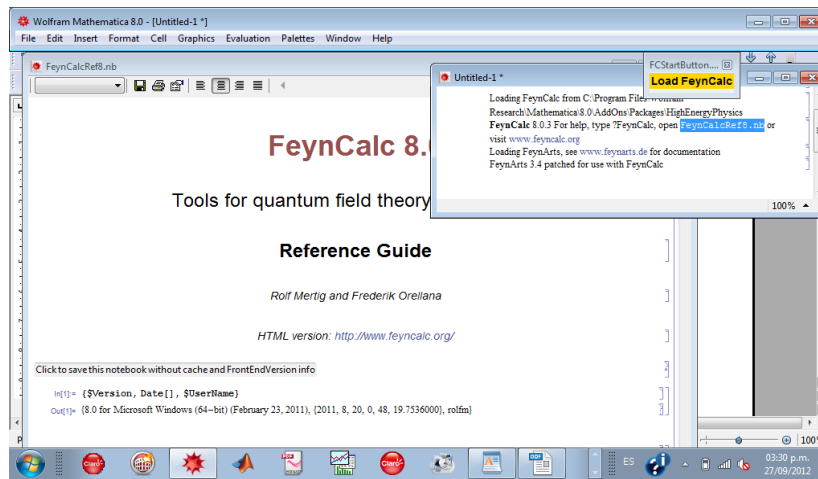


Fig. 4 Esquema general del notebook de instructivo de FeynCalc.

3. Planteamiento de la Hipótesis para conectar la mecánica clásica con la mecánica cuántica mediante el uso de diagramas de Feynman.

Todo evento en un sistema mecánico clásico puede ser descrito de manera equivalente a uno cuántico, es decir mediante la integral de camino de Feynman al considerar que un camino, trayectoria u órbita del sistema clásico consiste en una suma de eventos cuánticos. Por lo tanto, para un sistema clásico como para uno cuántico puede usarse un lagrangiano al estilo de Feynman descrito como

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha} b_{\alpha}(q) \dot{q}_\alpha - V(q) \quad [10]$$

donde

$$p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\beta} + b_{\alpha}(q) \quad [11]$$

Como consecuencia, significa que es posible aplicar las reglas de Feynman y sus diagramas para expresar topológicamente el proceso de interacción u evento del caso clásico.

4. Metodología de la Investigación

El enfoque epistemológico para el presente trabajo de investigación se basa en el método positivista, y deductivo. El tipo de investigación a desarrollarse está comprendido dentro de la física teórica, por lo cual los experimentos son teóricos por hipótesis y computacionales. Por consiguiente, parte del método consiste en estudiar un problema semiclásico, el oscilador armónico simple, que tiene gran aplicación cuántica y clásica. Analizar el tratamiento del lagrangiano, y de la amplitud de probabilidad mediante la integral de Feynman, así como el comportamiento topológico del sistema. Para esto se procederá a hacer uso del software FeynCalc soportado por el software Mathematica. Se analizará el despliegue de las topologías basado en la idea de los diagramas de Feynman para el cual se utilizará como soporte el paquete FeynArt, también incluido en FeynCalc o bien descargable por separado.

5. Resultados y Discusión

Para el caso clásico el lagrangiano del oscilador armónico basada en la ecuación [10] puede escribirse como

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\beta - V(q) \quad [12]$$

La cual adquiere una forma equivalente a la ecuación [8], pero para efectos de una primera aproximación en el cálculo basado en FeynCalc se puede escribir como

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) \quad [13]$$

Una vez cargado FeynCalc se procedió a definir el potencial $V(q)$, se determino la amplitud de probabilidad para pasar de una coordenada q_1 a la coordenada q_2 :

$$S = \text{FeynAmp}[q_1, q_2, \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + V] \quad [14]$$

Luego se aplicaron las reglas de Feynman para ese caso, en lo cual se obtuvo la siguiente lista de topologías tal a como se describe en la Fig. 5.

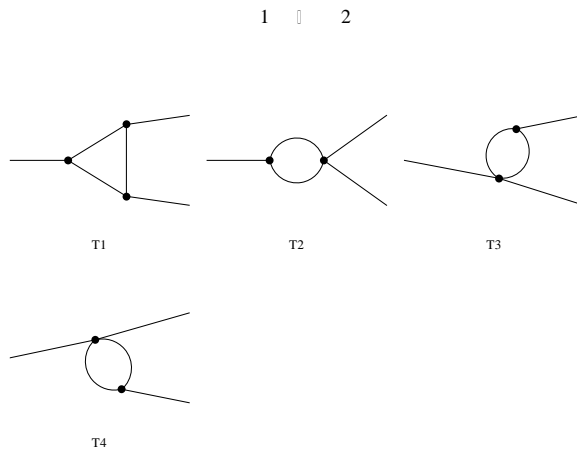


Fig. 5 Lista de topologías desplegadas de acuerdo a FeynCalc

Al aplicar las reglas de Feynman, se consideró el parámetro **ZeroMomentumInsertion** como *falso*, en vista de que no hay interacción por choques, lo cual se considera al representar al lagrangiano en su forma clásica.

Código en Mathematica de aplicación de FeynCalc:

```
In[26]:= << HighEnergyPhysics`FeynCalc`
Loading FeynCalc from C:\Program Files\Wolfram Research\Mathematica\8.0\AddOns\Applications\HighEnergy-
Physics
FeynCalc 8.0.3 For help, type ?FeynCalc, open FeynCalcRef8.nb or visit www.feyncalc.org
Loading PHI
HighEnergyPhysics`FeynArts`Integral::shdw :
Symbol Integral appears in multiple contexts {HighEnergyPhysics`FeynArts`, System`}; definitions
in context HighEnergyPhysics`FeynArts` may shadow or be shadowed by other definitions. >>
Loading FeynArts, see www.feynarts.de for documentation
FeynArts 3.4 patched for use with FeynCalc

In[27]:= $LoadFeynArts
Out[27]:= True
In[28]:= $LoadPhi = True;
In[29]:= V[q_] := q^2
In[30]:= S = FeynAmp[q1, q2, 1/2 (dq/dt)^2 + V]
Out[30]:= Integrate[d^D q1 Integrate[d^D q2 ((dq)^2/2 + V)]
In[31]:= FeynRule[S, fi, ZeroMomentumInsertion -> False]
Out[31]:= FeynRule[Integrate[d^D q1 Integrate[d^D q2 ((dq)^2/2 + V)], fi, ZeroMomentumInsertion -> False]
In[32]:= top = CreateTopologies[1, 1 -> 2, ExcludeTopologies -> Internal]
Out[32]:= TopologyList(
Topology(1)(Propagator(Incoming)(Vertex(1)(1), Vertex(3)(4)), Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(2), Vertex(3)(5)),
Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(3), Vertex(3)(6)), Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(4), Vertex(3)(5)),
Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(4), Vertex(3)(6)), Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(5), Vertex(3)(6))),
Topology(2)(Propagator(Incoming)(Vertex(1)(1), Vertex(3)(4)), Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(2), Vertex(4)(5)),
Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(3), Vertex(4)(5)), Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(4), Vertex(4)(5)),
Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(4), Vertex(4)(5))), Topology(2)(Propagator(Incoming)(Vertex(1)(1), Vertex(4)(4)),
Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(2), Vertex(3)(5)), Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(3), Vertex(4)(4)),
Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(5), Vertex(4)(4)), Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(5), Vertex(4)(4))),
Topology(2)(Propagator(Incoming)(Vertex(1)(1), Vertex(4)(4)), Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(2), Vertex(4)(4)),
Propagator(Outgoing)(Vertex(1)(3), Vertex(3)(5)),
Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(5), Vertex(4)(4)), Propagator(Loop(1))(Vertex(3)(5), Vertex(4)(4)))
```

6. Conclusiones

Considerando los resultados del presente trabajo de investigación, es posible implementar el software FeynCalc al estudio de un problema semiclásico, como lo es el oscilador armónico simple. Por otra parte, se logró computar el lagrangiano en su primera aproximación para el caso del oscilador armónico simple. Además, se logró desplegar las topologías iniciales para poder representar dicho lagrangiano en forma de diagramas topológicos (al estilo de Feynman). El hecho de que FeynCalc pueda brindar un esquema topológico de la interacción o de la mecánica analizada, permite inferir que es posible extenderse a nuevas investigaciones de carácter topológico con los diagramas de Feynman a problemas de la mecánica clásica, sin embargo, esto implica considerar otras aplicaciones con ciertas restricciones.

De todo lo antes expuesto, el presente trabajo de investigación cumple con los objetivos de contribuir con la aplicación de la física teórica basada en los fundamentos de diagramas de Feynman al estudio de un problema semi-clásico, así como aplicar el toolbox FeynCalc soportado sobre el software Mathematica como herramienta para la aplicación y simulación de problemas de la mecánica clásica bajo un tratamiento de la mecánica cuántica,

esto permitirá para el futuro el desarrollar nuevas metodologías de simulación que permita ser la base para estudiar sistemas clásicos mediante formalismos cuánticos. Esto implica otros análisis como el de desarrollar el estudio del oscilador armónico simple bajo un tratamiento matricial, a como si éste describiera un sistema atómico.

Referencias bibliográficas

Hahn, Thomas (2000) Generating Feynman Diagrams and Amplitudes with FeynArts 3. hep-ph/0012260.

Eck, H.(1995) FeynArts 2.0 Development of a generic Feynman diagram generator. Würzburg. Doctoral Thesis.

Kumerički, Kręsimir. (2001) Feynman Diagrams for Beginners. Notes for the exercises at the *Adriatic School on Particle Physics and Physics Informatics*.

Ziella D. H. (2008) Cuantificación por integrales de camino. P. 11-12.