

*Influence géométrique simple sur le module d'élasticité transversale d'un renfort cylindrique et sur le module d'élasticité d'un renfort sphérique*

## **résumé**

Je vous propose une théorie du module d'élasticité transversal pour les composites à renfort fibrillaire unidirectionnel qui tente de prévoir sa valeur en fonction des modules de chaque éléments ainsi que de sa forme cylindrique. Dans la continuité, je propose aussi un extrapolation à un renfort particulaire d'une forme sphérique.

Les théories existantes sur les modules d'élasticité m'ont toujours parue trop simplistes ou trop compliquées...

mot clés : composite, module d'élasticité, module Young, renfort cylindrique, renfort sphérique, orthotropie, isotropie transverse

---

## **summary**

I have worked on a theory about transversal elastic modulus about unidirectional fiber composite which try to predict its value by cylinder's geometrical approach. By the way, I have continued with spherical geometry about particulars composites

Theories in place about elastic modulus are, in my opinion, too much simples or too much complicates...

keywords : composite, elastic modulus, Young's modulus, cylindrical reinforcement, spherical reinforcement, orthotropic, transverse isotropic

## **Avant propos**

Cet essai a été écrit en quelque temps pendant l'année 2020 à un petit rythme pendant les crises sanitaires lié au COVID. J'avais commencé cet écrit lors du premier confinement en Mars 2020 de France ; et je l'ai fini quelque mois plus tard. Je comptais le publier ou le prépublier quelque part

**zone intentionnellement laissée blanc**

Me concernant : j'avais repris mes études à un niveau de Master de l'ingénierie en mécanique et matériau orienté composite. Pendant mes études, j'avais compris que les lois des mélanges étaient simple, même beaucoup trop simple, mais pas si éloigné d'une réalité que ça.

Je n'ai pas de laboratoire à disposition et donc je suis limité sur la quantité de mesures expérimentales pour infirmer ou confirmer mes prédictions. De plus, il existe tellement de sorte de composite (organique, céramique, métallique) que certains vont sûrement être mal prédites par mes modèles. Cependant, j'espère bien naturellement que mes prédictions ne soient pas trop mauvaises.

## **Introduction**

L'étude et la prédiction du module transversal par les différentes méthodes et approximations m'ont toujours étonné par les valeurs prédites très mauvaises dû à des simplifications trop simplistes ou des approches trop compliquées, à mon goût. Je ne comprenais pas pourquoi on ne prenait pas en considération les formes géométriques des renforts... Alors que la théorie des loi des mélanges prédit plutôt bien les valeurs de  $E_1$  et  $\nu_{12}$  ; un autre modèle, que je ne citerais pas ici, prédisant plutôt bien le  $G_{12}$  ; je n'avais cependant rien trouvé de probant sur le module  $E_2$ . Je me suis alors demandé pourquoi on ne prenait pas en compte les géométries des éléments respectifs.

C'est ainsi que j'ai entrepris la résolution du module  $E_2$  en considérant plutôt les formes géométriques. Pour vous amener à ces résolutions, je vous propose une trame de lecture.

Dans la première partie, je vous propose le modèle physique qui corrige les Loi de Mélange, et les résolutions des équations dont j'aurais besoin pour le modèle physique.

Dans la deuxième partie, je vous propose les équations dont nous pouvons retenir le modèle d'un composite à base de fibre continue dispersée de manière statistique équilibré

Dans la troisième partie, je vous propose les équations pour des modèles de composite à base de fibre continue dispersée de manière statistiquement non-équilibré.

Dans la quatrième partie, je vous propose les équation pour un modèle de composite sphérique disposé de manière statistiquement équilibrée.

Je vous souhaite bonne lecture

*thomas NGUYEN*

## **Remerciements**

Je pense que je peux m'attribuer le mérite intellectuel, mais j'aimerais également partager le mérite sur d'autres points. Tout d'abord, je remercie Wikipédia dans la généralité sur les contenus souvent pertinents et disponibles à tous, qui m'ont permis d'appréhender les outils mathématiques qui me manquait au début ; ainsi que le site numberempire.com pour leur gratuité et praticité dans les graphiques et le résolveur d'intégrale partielle, m'ayant énormément guidé et aidé dans les calculs des primitives. Sans ces deux principaux outils, l'idée aurait toujours été dans ma petite tête, mais les calculs de primitives auraient mis beaucoup plus de temps avant d'être formaliser.

Enfin un merci Spécial pour Pierre-Michel Trinh...

## Table des matières

Avant propos .....	3
Introduction.....	4
Remerciements.....	5
Table des matières.....	6
Glossaire.....	7
Notation et vocabulaire .....	8
Abréviations .....	9
Partie I – Grands principes de calcul.....	10
I.a –Distribution et redistribution des contraintes .....	10
I.b – Isotropie, Isotropie transverse, Orthotropie .....	12
I.c – Calcul d’une primitive pour $k^2=1$ .....	13
I.d – Calcul d’une primitive et intégrale pour $k^2 < 1$ .....	14
I.e – Calcul d’une primitive pour $k^2 > 1$ .....	16
Partie II – Modèle renfort cylindrique dans une matrice carrée .....	17
II.a – Résolution .....	17
II.b – Équation simplifiée $E_m \ll E_f$ .....	19
II.c – Équation simplifiée hyperbolique.....	20
II.d - Courbes.....	21
Partie III – Modèle renfort cylindrique dans une matrice hexagonale .....	23
III.a – Limite de résolution analytique.....	23
III.b – Résolution sous taux intermédiaire.....	24
III.c – Problème après taux intermédiaire.....	26
III.d – Proposition de modèle simplifié par négligence.....	28
III.e – Courbes.....	31
Partie IV – Modèle en trois dimensions.....	32
IV.a – Renfort sphérique dans matrice cubique .....	32
IV.b – Renfort sphérique dans une matrice cylindre assimilée cubique.....	34
IV.c – Équation simplifiée $E_m \ll E_f$ .....	36
IV.d – Équation simplifiée hyperbolique .....	36
IV.e – Courbes.....	37
Discussions .....	38
Annexe I .....	40
Annexe II.a.....	43
Annexe II.b.....	44
Annexe II.c.....	45
Bibliographie .....	46

## Glossaire

$\Phi_c$  : taux volumique dans une considération de renfort Cylindrique en arrangement carré

$\Phi_s$  : taux volumique dans une considération de renfort Sphérique dans un arrangement cubique

$\Phi_l$  : taux intermédiaire volumique dans une considération de renfort cylindrique en arrangement Losange régulier sous une certaine limite d'environ 68%

$b$  (voir  $h$ ) : longueur ou largeur dans une maille rectangulaire en deux dimensions

$c$  : paramètre de maille carré en deux dimensions

$C$  : paramètre d'une maille cubique en trois dimensions

$d$  : diamètre d'un renfort fibrillaire, ou diamètre projeté d'une sphère dans un plan en deux dimensions

$D$  : diamètre d'un renfort sphérique en trois dimensions

$h$  (voir  $b$ ) : longueur ou largeur dans une maille rectangulaire en deux dimensions

$E_b$  : module intermédiaire d'une Bande de calcul pour un renfort

$E_c$  : module transversale d'un composite à renfort fibrillaire Cylindrique

$E_s$  : module d'un composite à renfort particulière Sphérique

$E_m$  : module de la matrice (supposé isotrope)

$E_f$  : module transversale du renfort (peut être différent du module longitudinal)

Arrangement : désigne la considération géométrique de la forme de répétition de la matrice/renfort

Cisversale : désigne la direction orthogonale à la déformation (ou contrainte) transversale et la direction des fibres

Dispersion : désigne les possibles diamètres des renforts cylindriques ou sphériques

Distribution (des efforts/contraintes) : répartition des lignes d'efforts suivant une rectiligne à travers tout le matériau. Par extension, nous pourrions aussi parler de distribution des contraintes.

Longitudinale : désigne le sens des fibres

Ligne d'effort : chemin que suit une force à travers le matériau

Redistribution (des contraintes) : variation de contrainte influencée par les déformations mutuelles transversale-cisversale à travers le matériaux

Transversale : désigne la direction où l'on étudie le module et étant orthogonale aux fibres

Taux intermédiaire : taux volumique dans un arrangement losangé régulier des renforts fibrillaires à environ 68%

## Notation et vocabulaire

### Cisversalité :

Les composites à renforts particuliers, dont nous traiterons comme des renforts sphériques, ont l'avantage d'être considérés comme des matériaux isotropes. Dans ce cas, les termes de module d'élasticité longitudinal et transversal n'ont pas de significations physiques. Nous adopterons la notation de module  $E_s$  et taux de renfort  $\Phi_s$  pour parler du modèle sphérique.

À l'inverse, les composites à renforts fibrillaires sont cependant considérés au moins comme isotropes transverses. Dans ce cas, il y a un intérêt à dissocier les valeurs longitudinales (sens des fibres) et les valeurs transversales. Cependant, nous allons aussi avoir besoin de la troisième dimension. Dans ce cas, nous allons adopter le repère  $(\vec{x} ; \vec{y} ; \vec{z})$  et :

- sens des fibres par la direction  $\vec{x}$  et le terme longitudinal
- déformation/contrainte transversale uniquement dans la direction  $\vec{z}$
- déformation/contrainte « cisversale » dans la direction  $\vec{y}$
- la notation de module transversal  $E_c$  et taux de renfort  $\Phi_c$  pour modèle cylindrique

Le terme cis, est un terme emprunté à la chimie et signifie l'opposé de trans. Nous allons avoir besoin de parler à certains moments de la troisième direction, donc autant définir un terme d'usage.

### Notation borne d'intégration :

Pour les renforts que nous allons supposer cylindriques ou sphériques dans le plan de résolution par leurs expressions de type :  $\begin{cases} x/R = \cos(\theta) \\ y/R = \sin(\theta) \end{cases}$

nous allons adopter l'écriture de la borne haute par sa forme trigonométrique. C'est à-dire que :

$$\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x/R)^2}} \partial y. \partial x$$

sera remplacé par une écriture de forme hybride cartésienne/trigonométrique :

$$\int_{x=A}^{x=B} \int_{y=0}^{y=R.\sin(\theta)} \partial y. \partial x$$

La notation n'est pas rigoureusement correcte, mais il faut prendre cette écriture comme un raccourci. Pour les équations qui nous intéressent, leurs primitives n'existent pas sous leurs formes cartésiennes et nous allons devoir faire un changement de variable amenant à leurs formes trigonométriques. De plus, la forme hybride permettra d'alléger une étape lors de la résolution. Enfin, le dernier intérêt est de fixer dès le début la relation entre la base trigonométrique et cartésienne ; et par la même occasion le changement de variable qui sera appliqué lors du changement de base.

Sous la forme trigonométrique, il y a des curiosités mathématiques (à mon sens) qui seront présentées dans les annexes I. Cette annexe concerne essentiellement les bornes trigonométriques d'intégration qui peuvent être problématiques.

## **Abréviations**

**LDM** : Loi Des Mélanges

**LIM** : Loi Inverse des Mélanges

**CEC** : (chapitre II.a) module d'élasticité transversal d'un renfort Cylindrique Entouré d'une matrice Carrée

**ES2** : (chapitre II.b) module d'élasticité transversal dans une Équation Simplifiée en 2 dimensions

**HS2** : (chapitre II.c) Module d'élasticité transversal approché par une équation Hyperbolique Simplifiée en 2 dimensions

**LBB** : (chapitre III.b) Limite en Borne Basse théorique du module d'élasticité transversal d'un composite fibrillaire

**LBH** : (chapitre III.b) Limite en Borne Haute théorique du module d'élasticité transversal d'un composite fibrillaire sous un seuil de 68%

**ABB** : (chapitre III.d) Approximation en Borne Basse du module d'élasticité transversal d'un composite fibrillaire au-dessus de 68%

**ABH** : (chapitre III.d) Approximation en Borne Haute du module d'élasticité transversal d'un composite fibrillaire au-dessus de 68%

**TBH** : (chapitre III.d) Transition en Borne Haute du module d'élasticité transversal d'un composite fibrillaire aux alentours de 68%

**SEC** : (chapitre IV.a - IV.b) module d'élasticité d'un renfort Sphérique Entouré d'une matrice Cubique

**ES3** : (chapitre IV.c) module d'élasticité approché par une Équation Simplifiée en 3 dimensions

**HS3** : (chapitre IV.d) Module d'élasticité approché par une équation Hyperbolique Simplifiée en 3 dimensions

# Partie I – Grands principes de calcul

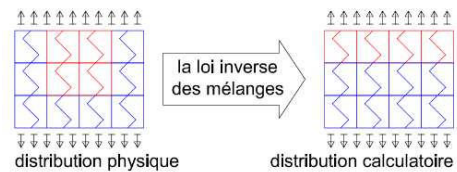
## 1.a – Distribution et redistribution des contraintes

Notre mise en équation et sa résolution peut se comparer à un système équivalent de ressorts. Lorsque nous mettons deux ressorts en parallèle, la raideur moyenne est donc simplement la moyenne pondérée des deux ressorts ; lorsque nous mettons deux ressorts en série, la raideur moyenne se calcul par son inverse valant la somme des inverses pondérés des raideurs. Nous retrouvons ces types de formule sur la loi des mélanges et sa loi inverse de la théorie classique qui

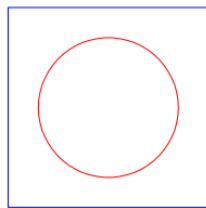
dépendent du taux volumique de renfort  $\Phi$  tel que :

$$\begin{cases} E_1 = \Phi \cdot E_f + (1 - \Phi) \cdot E_m \\ \frac{1}{E_2} = \frac{\Phi}{E_f} + \frac{1-\Phi}{E_m} \end{cases}$$

Cependant, telle que la figure ci-contre nous montre, la loi inverse des mélanges impose une redistribution de la matière pour faciliter le calcul, mais devient trop éloigné de la réalité. Nous vous proposons alors de ne pas considérer de distribution calculatoire qui fausse la physique.



Dans le cas d'un modèle continu, il y a tout de même quelques adaptations à prendre en compte. Il faut en premier lieu calculer une bande de module intermédiaire par des « pixels » (ça revient à parler de discrétisation) d'éléments le long de la bande, et dans cette configuration, c'est donc un calcul d'inverse qui intervient. Enfin, il faut calculer la moyenne des différentes bandes pour avoir le module moyen transversal.



Dans les figures 1->4 (de haut vers le bas), nous avons choisi la couleur bleu correspondant à la zone d'influence de la matrice et le rouge à la zone d'influence du renfort.

pixelisation

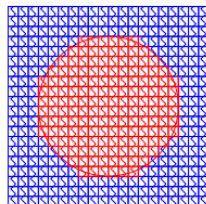


Figure 2) Nous supposons des éléments finis par des « pixels » représentant des ressorts équivalents élémentaires. Nous utilisons un modèle de ressort pour que la conception soit plus facile à appréhender. Cependant, ça revient à parler de la loi des mélanges pour des bandes, et loi inverse des mélanges pour les « pixels »

intermédiaire

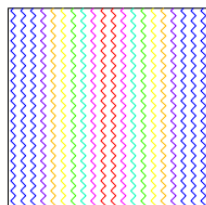


Figure 3) module intermédiaire (calcul des « ressorts » en série). Nous devons dans un premier temps calculer une bande de module élémentaire « inversé moyenné » qui se base sur l'expression des inverses des modules. Chaque couleurs indiquent un module intermédiaire de valeurs différentes.

transversale

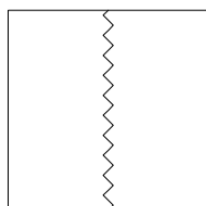


Figure 4) module transversale cylindrique dont nous calculons par « simple moyenne »

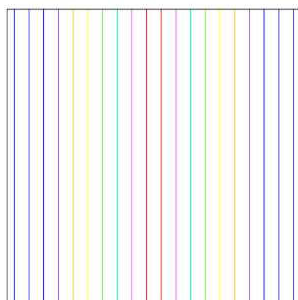
Cependant ce modèle ne prend pas en compte la redistribution de contrainte. Pour illustrer la notion de distribution et de redistribution de contrainte, nous allons commencer par l'illustrer en un exemple de ressorts.

Lorsque nous avons deux ressorts parallèles de raideurs différentes qui se déforment ensemble de la même façon, il y a une distribution des efforts dans les deux ressorts. Dans la pratique, nous calculons la raideur moyenne, mais nous pouvons aussi voir le problème comme deux efforts d'intensités différentes qui passent dans les deux ressorts et qui donnent une seule et même déformation. Dans ce cas, nous allons nommer ce mécanisme de distribution des efforts. Dans le modèle continu des modules, nous avons donc le même mécanisme que nous appellerons distribution des contraintes. Une autre manière d'expliquer ce concept serait de parler de lignes d'efforts parallèles entre elles ; et dont les lignes d'efforts peuvent être d'intensités différentes les unes des autres. Lorsque nous considérons une ligne d'effort par sa largeur infinitésimale, nous calculons alors en fait sa contrainte. Dans un exemple : nous soumettons un ressort de raideur  $K_1$  et un autre ressort de raideur  $K_2$  montés en parallèle, la raideur totale est donc  $K_1 + K_2$ . Pour un effort d'intensité  $F_0$ , nous avons un déplacement de  $\delta$ . L'autre façon d'appréhender le système est de considérer la distribution des efforts dans chaque ressort. Dans ce cas, le premier ressort va donc prendre un effort  $F_1$ , et le second va prendre un effort  $F_2$  ; avec la relation  $F_0 = F_1 + F_2$ . Nous obtenons :

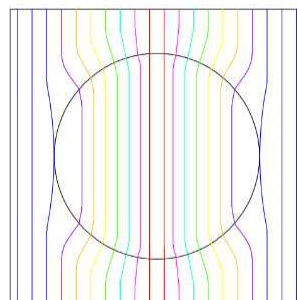
$$\begin{cases} F_1 = K_1 \cdot \delta \\ F_2 = K_2 \cdot \delta \\ F_0 = F_1 + F_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{F_0}{1 + \frac{K_2}{K_1}} = K_1 \cdot \delta \\ F_2 = \frac{F_0}{1 + \frac{K_1}{K_2}} = K_2 \cdot \delta \end{cases} \rightarrow F_0 = (K_1 + K_2)\delta$$

Ces équations nous disent que les ressorts de raideur  $K_1$  et  $K_2$  forment ensemble un ressort équivalent ; mais nous trouvons tout aussi bien une distribution des efforts différents attribuée aux raideurs de chacun des éléments dans l'ensemble des ressorts et en ayant un unique déplacement.

Le modèle que nous trouvons ne prend cependant pas en compte les influences cisversales et est encore un modèle simplifié. C'est à dire lorsque nous déformons transversalement, il y a une déformation cisversale. Nous mélangeons deux matériaux de formes, de modules et de coefficients de Poisson différents. Ce qui engendre forcément une déviation des lignes d'effort dans le matériau composite fini, nous parlerons alors de redistribution des contraintes. La résolution de ce problème pourrait peut-être prédire la mauvaise adhérence de la fibre d'aramide, mais cela ne fait pas partie de cette publication. Mettre en équation les interactions cisversales ne semblent pas encore à portée analytique et donc nous nous arrêterons au modèle « simple » à distribution de contrainte.



EFFORT DISTRIBUE



EFFORT REDISTRIBUE

En des autres termes, nous parlerons de distribution des contraintes lorsque les lignes de forces sont rectilignes à travers tout le matériau ; et nous nommerons la redistribution des contraintes lorsque les lignes de forces ne sont pas rectilignes dû aux déformations cisversales. Dans la redistribution des contraintes, la forme de la répartition des contraintes est variable à travers le matériau.

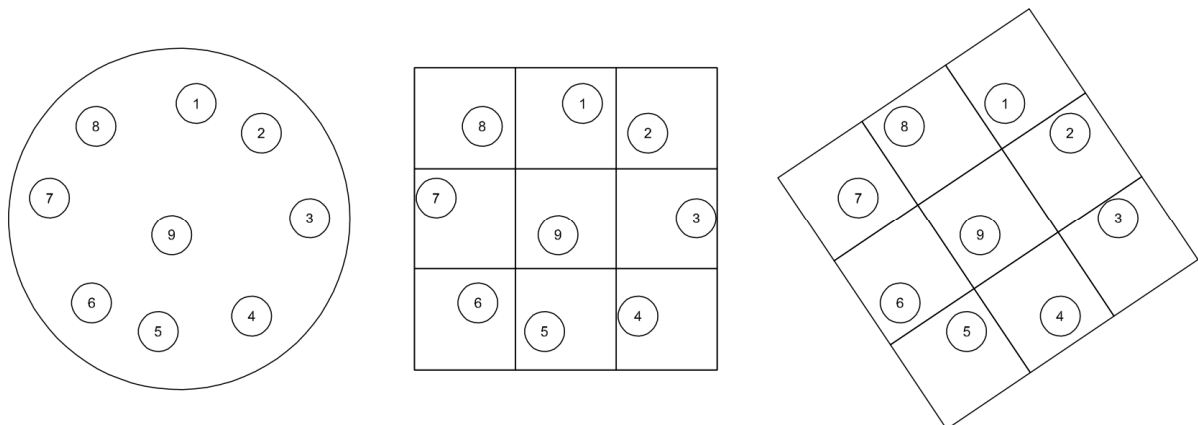
## **Partie I – Grands principes de calcul**

### **1.b – Isotropie, Isotropie transverse, Orthotropie**

Il y a une difficulté majeure de calcul que nous ne résoudrons pas. Nous ferons une hypothèse sur l'arrangement des fibres : soit en arrangement aléatoire, et donc nous supposons que nous avons une position moyenne des renforts qui est toujours inclus dans une maille carré ; soit en arrangement pseudo-aléatoire inclus dans une maille qui ne sera pas carré mais avec une forme rectangulaire.

Nous allons supposer une invariance statistique de la position du renfort quel que soit l'orientation où nous regardons le composite. Le calcul de la bande (1 dimension) élémentaire est trouvé par la moyenne pondérée des inverses des modules ; le calcul de la tranche (2 dimensions) est trouvé par la moyenne pondérée des modules des bandes élémentaires ; enfin le calcul du bloc (3 dimensions) est trouvé par la moyenne pondérée du modules des tranches élémentaires. Cela implique que tant que le renfort est dans la maille, sa position relative n'est pas importante. Remarquons en plus, concernant les renforts fibrillaires, le troisième calcul du bloc est superflu.

Si nous considérons les positions des fibres de manière aléatoire, nous pourrions prendre le modèle renfort cylindrique dans une matrice carrée pour un renfort fibrillaire qui forme un matériau isotrope transverse ; et si nous considérons les positions de particules de manière aléatoire, nous pourrions prendre le modèle particulaire sphérique dans une matrice cubique qui forme un matériau isotrope. La justification rigoureuse ne sera pas démontrée ici et est un problème de statistique. La figure ci-dessous nous montre une intuition à une échelle très réduite de l'invariance du module transversal. Enfin, ne pas prendre en compte la cisversalité nous permet de faire cette approximation de maille identique.



Si nous considérons les positions des fibres pseudo-aléatoire, c'est à dire aléatoire mais avec une direction privilégiée, nous pourrions prendre le modèle renfort cylindrique dans une matrice « hexagonale régulière », qui donnera en revanche un matériau orthotrope. Nous considérons que la disposition « hexagonale régulière » donne des bornes fiables dans une fabrication d'un matériau composite fibrillaire dû à une mise en œuvre particulière. Nous ne vous présenterons pas d'autre arrangement, car la méthodologie restera fondamentalement la même.

Nous ne ferons pas l'arrangement « hexagonal » dans le modèle particulaire dans la suite. Nous supposons que les composites particuliers ont plutôt des positions aléatoires, mais les calculs pour des arrangements autres restent tout à fait possible. Le modèle tridimensionnel amène cependant à plusieurs arrangements pseudo-aléatoires à prendre en compte.

## **Partie I – Grands principes de calcul**

### **I.c – Calcul d'une primitive pour $k^2=1$**

Nous allons avoir besoin d'une primitive pour la grande majorité de la publication qui est de forme :

$$\int \frac{k \cdot \sin(s)}{1 \pm k \cdot \sin(s)} \partial s$$

La difficulté de cette primitive réside dans le choix du  $k$ , nombre réel positive ou négative, qui influe sur l'expression de la primitive. Il y a trois possibilités :

$$\begin{cases} k^2 < 1 \\ k^2 = 1 \\ k^2 > 1 \end{cases}$$

Pendant pour alléger les notations, nous allons toujours exprimer  $k$  en tant que nombre réel positif. Pour le reste de la publication, la forme que nous allons rencontrer sera toujours :

$$\int \frac{k \cdot \sin(s)}{1 - k \cdot \sin(s)} \partial s$$

- Nous allons tout d'abord commencer par chercher une forme proche :

$$\int \frac{1}{1 - \sin(s)} \partial s$$

Commençons par :

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln(1 - \sin(s)) = \frac{-\cos(s)}{1 - \sin(s)}$$

Si nous redérivons par son négatif :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\cos(s)}{1 - \sin(s)} \right\} = \frac{-\sin(s)(1 - \sin(s)) + \cos^2(s)}{(1 - \sin(s))^2} = \frac{-\sin(s)(1 - \sin(s)) + (1 - \sin^2(s))}{(1 - \sin(s))^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\cos(s)}{1 - \sin(s)} \right\} = \frac{-\sin(s)(1 - \sin(s)) + (1 - \sin(s))(1 + \sin(s))}{(1 - \sin(s))^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\cos(s)}{1 - \sin(s)} \right\} = \frac{1}{1 - \sin(s)}$$

- Nous allons pouvoir compléter la forme :

$$\int \frac{\sin(s)}{1 - \sin(s)} \partial s = \int \left\{ \frac{A}{1 - \sin(s)} + B \right\} \partial s = \int \frac{(A + B) - B \sin(s)}{1 - \sin(s)} \partial s$$

Il vient alors :  $\begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$

Finalement :

$$\int \frac{\sin(s)}{1 - \sin(s)} \partial s = \frac{\cos(s)}{1 - \sin(s)} - s$$

Dans la suite, la probabilité d'utiliser la forme avec  $k = 1$  est nulle.

## **Partie I – Grands principes de calcul**

### **I.d – Calcul d'une primitive et intégrale pour $k^2 < 1$**

- Dans le cas où  $k < 1$ , nous commençons par :

$$\int \frac{\partial t}{1 - k \cdot \sin(t)}$$

En utilisant les règles de Broche, nous posons :

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \\ \partial t = \frac{2}{1+u^2} \partial u \end{cases}$$

il vient ainsi :

$$\int \frac{\partial t}{1 - k \cdot \sin(t)} = \int \frac{1}{1 - k \frac{2u}{1+u^2}} \left(\frac{2}{1+u^2}\right) \partial u = 2 \int \frac{\partial u}{1 - k \cdot 2u + u^2}$$

Nous cherchons l'expression de  $v$ , tel que nous connaissons la forme de la primitive :

$$\int \frac{\partial t}{1 - k \cdot \sin(t)} = 2 \int \frac{\partial u}{1 - k2u + u^2} = 2 \cdot B \int \frac{\partial v}{1 + v^2}$$

Nous avons alors :

$$v^2 + 1 = \frac{u^2 - 2k \cdot u + k^2}{1 - k^2} + \frac{1 - k^2}{1 - k^2}$$

$$v^2 = \frac{u^2 - 2k \cdot u + k^2}{1 - k^2} = \left(\frac{u - k}{\sqrt{1 - k^2}}\right)^2$$

$$v = \frac{u - k}{\sqrt{1 - k^2}} \rightarrow \partial v = \frac{\partial u}{\sqrt{1 - k^2}}$$

Nous déduisons ainsi :  $B = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$

$$\int \frac{\partial t}{1 - k \cdot \sin(t)} = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \int \frac{\partial v}{1 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan(v) = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan\left(\frac{u - k}{\sqrt{1 - k^2}}\right)$$

$$\int \frac{\partial t}{1 - k \cdot \sin(t)} = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right) - k}{\sqrt{1 - k^2}}\right)$$

- Pour rajouter  $k \cdot \sin(t)$  au numérateur :

$$\int \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \int \left\{ \frac{1}{1 - k \cdot \sin(t)} - 1 \right\} \partial t$$

compte-tenu de tous ces éléments, la primitive est donc :

$$\int \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right) - k}{\sqrt{1 - k^2}}\right) - t$$

- Dans le cas particulier des bornes  $|0; \pi/2|$  :

$$\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \left| \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan \left( \frac{\tan \left( \frac{t}{2} \right) - k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) - t \right|_{t=0}^{t=\pi/2}$$

$$\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan \left( \frac{\tan \left( \frac{\pi/2}{2} \right) - k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan \left( \frac{\tan(0) - k}{\sqrt{1 - k^2}} \right)$$

$$\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(s)}{1 - k \cdot \sin(s)} \partial t = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \left( \arctan \left( \frac{1 - k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) - \arctan \left( \frac{-k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) \right) - \frac{\pi}{2}$$

or :

$$\begin{cases} \arctan \left( \frac{1 - k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) = \frac{\arccos(k)}{2} \\ -\arctan \left( \frac{-k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) = \arctan \left( \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) = \pi/2 - \arccos(k) \end{cases}$$

il vient :

$$\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \frac{2 \frac{\arccos(k)}{2} + 2 \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arccos(k)}{\sqrt{1 - k^2}} - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \frac{\pi - \arccos(k)}{\sqrt{1 - k^2}} - \frac{\pi}{2}$$

or :  $\pi - \arccos(k) = \arccos(-k)$

il vient

$$\boxed{\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \frac{\arccos(-k)}{\sqrt{1 - k^2}} - \frac{\pi}{2}}$$

Cette expression sera la principale forme utilisée dans cette publication.

**Remarque 1 :**  $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{\partial}{\partial k} \arccos(-k)$

d'où :

$$\arccos(-k) \frac{\partial}{\partial k} \arccos(-k) = \frac{\partial}{\partial k} \frac{\arccos^2(-k)}{2}$$

$$\int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(t)}{1 - k \cdot \sin(t)} \partial t = \frac{\partial}{\partial k} \left\{ \frac{\arccos^2(-k)}{2} \right\} - \frac{\pi}{2}$$

## Partie I – Grands principes de calcul

### I.e – Calcul d'une primitive pour $k^2 > 1$

- D'une façon différente que les chapitres précédents, nous allons donner une primitive pour :

$$\int \frac{\partial w}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \ln \left( \frac{\sin(w) - (k + \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1)}{\sin(w) - (k - \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1)} \right)$$

Nous allons démontrer que cette relation est vraie en dérivant :

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \ln \left( \frac{\sin(w)}{\cos(w) + 1} - k - \sqrt{k^2 - 1} \right) - \ln \left( \frac{\sin(w)}{\cos(w) + 1} - k + \sqrt{k^2 - 1} \right) \right\}$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{\frac{1}{\cos(w) + 1}}{\frac{\sin(w)}{\cos(w) + 1} - k - \sqrt{k^2 - 1}} - \frac{\frac{1}{\cos(w) + 1}}{\frac{\sin(w)}{\cos(w) + 1} - k + \sqrt{k^2 - 1}}$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{1}{\sin(w) + (-k - \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1)} - \frac{1}{\sin(w) + (-k + \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1)}$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{(\sin(w) + (-k + \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1)) - (\sin(w) + (-k - \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1))}{(\sin(w) + (-k + \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1))(\sin(w) + (-k - \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1))}$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{2(\cos(w) + 1)\sqrt{k^2 - 1}}{\sin^2(w) - 2k \cdot \sin(w)(\cos(w) + 1) + (\cos(w) + 1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{2\sqrt{k^2 - 1}}{\frac{\sin^2(w)}{\cos(w) + 1} + \frac{(\cos(w) + 1)^2}{\cos(w) + 1} - 2k \cdot \sin(w)}$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{2\sqrt{k^2 - 1}}{\frac{\sin^2(w) + \cos^2(w) + 2 \cdot \cos(w) + 1}{\cos(w) + 1} - 2k \cdot \sin(w)}$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)} = \frac{2\sqrt{k^2 - 1}}{2 \frac{\cos(w) + 1}{\cos(w) + 1} - 2k \cdot \sin(w)} = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{1 - k \cdot \sin(w)}$$

- Nous calculons enfin la primitive de :

$$\int \frac{k \cdot \sin(w)}{1 - k \cdot \sin(w)} \partial w = \int \left\{ \frac{1}{1 - k \cdot \sin(w)} - 1 \right\} \partial w$$

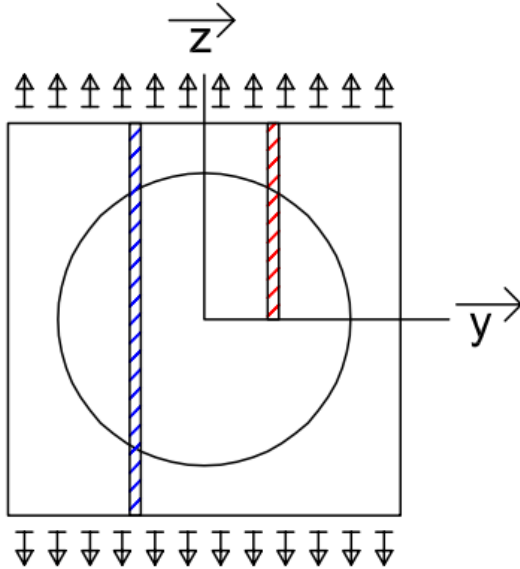
Finalement :

$$\int \frac{k \cdot \sin(w)}{1 - k \cdot \sin(w)} \partial w = \frac{\ln \left( \frac{\sin(w) - (k + \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1)}{\sin(w) - (k - \sqrt{k^2 - 1})(\cos(w) + 1)} \right)}{\sqrt{k^2 - 1}} - w$$

## Partie II – Modèle renfort cylindrique dans une matrice carrée

### II.a – Résolution

Nous cherchons à calculer  $E_c$  en considérant un renfort cylindrique dans une matrice de forme carrée. Nous commençons par calculer une bande élémentaire  $E_b$  (en bleu sur la figure) :



où :  $\begin{cases} c, \text{ paramètre de la maille carré} \\ d, \text{ est le diamètre du renfort} \\ \vec{y} = \cos(\theta) \vec{r} ; \vec{z} = \sin(\theta) \vec{r} \end{cases}$

- Par symétrie de l'axe  $\vec{y}$ , nous pouvons simplifier (en rouge sur le schéma) :

$$\int_{z=0}^{z=c/2} \frac{1}{E_b} \partial z = \int_{z=0}^{z=d/2 \cdot \sin(\theta)} \frac{1}{E_f} \partial z + \int_{z=d/2 \cdot \sin(\theta)}^{z=c/2} \frac{1}{E_m} \partial z$$

$$\frac{1}{E_b} = \frac{E_m - E_f}{E_m \cdot E_f} \frac{d}{c} \sin(\theta) + \frac{E_f}{E_m \cdot E_f}$$

$$E_b = \frac{E_m \cdot E_f}{(E_m - E_f) \frac{d}{c} \sin(\theta) + E_f}$$

$$E_b = \frac{E_m}{1 + \left(\frac{E_m}{E_f} - 1\right) \frac{d}{c} \sin(\theta)}$$

or  $E_m < E_f$ , dans ce cas nous préférons toujours écrire :

$$E_b = \frac{E_m}{1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{d}{c} \sin(\theta)}$$

Nous venons d'établir la formule qui donne le module élémentaire transversal pour une bande  $dz$ . Nous allons pouvoir établir sa moyenne sur toute la largeur de  $\vec{y}$  :

$$E_c = \frac{1}{c} \int_{y=-c/2}^{y=+c/2} E_b \cdot \partial y = \frac{2}{c} \int_{y=0}^{y=c/2} E_b \cdot \partial y$$

$$E_c = \frac{2}{c} \left( \int_{y=0}^{y=d/2} \frac{E_m}{1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{d}{c} \sin(\theta)} \partial y + \int_{y=d/2}^{y=c/2} E_m \cdot \partial y \right)$$

Nous faisons le changement de base :  $y = d/2 \cdot \cos(\theta)$

$$\text{avec : } \begin{cases} \partial y = -d/2 \cdot \sin(\theta) \cdot \partial \theta \\ y = d/2 \leftrightarrow \theta = 0 \\ y = 0 \leftrightarrow \theta = \pi/2 \end{cases}$$

$$E_c = \frac{2}{c} \left( E_m [y]_{d/2}^{c/2} + \int_{y=0 \rightarrow \theta=\pi/2}^{y=d/2 \rightarrow \theta=0} \frac{E_m}{1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{d}{c} \sin(\theta)} \frac{-d \cdot \sin(\theta)}{2} \partial \theta \right)$$

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{d}{c} + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{\frac{d}{c} \sin(\theta)}{1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{d}{c} \sin(\theta)} \partial \theta$$

$$\text{Nous posons : } k = \frac{d}{c} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)$$

il vient alors :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{k}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \partial \theta$$

De plus  $E_m < E_f \rightarrow k \in ]0; 1[$ , ce qui nous amène à la résolution du chapitre I.d, Il vient alors :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{k}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \frac{\arccos(-k)}{\sqrt{1 - k^2}}$$

Nous remplaçons  $k$  par son expression, d'où :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{\arccos\left(-\frac{d}{c} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\right)}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} - \frac{d}{c}$$

- Nous allons pouvoir réécrire l'équation en fonction du taux volumique

le volume engendré par la fibre représentant la fibre :  $V_f = \pi \frac{d^2}{4} L$

le volume engendré par le carré représentant la matrice :  $V_c = c^2 L$

avec L, la longueur du composite

Avec le rapport :  $\Phi_c = \frac{\pi d^2 L}{4c^2 L} \leftrightarrow \frac{d}{c} = 2\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}$

Nous réécrivons :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{\arccos\left(-2\sqrt{\frac{\Phi_c}{\pi}}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\right)}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\sqrt{1 - 4\frac{\Phi_c}{\pi}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} - 2\sqrt{\frac{\Phi_c}{\pi}}$$

Nous appellerons cette expression module transversal par CEC (Cylindrique Entouré d'un Carrée)

## **Partie II – Modèle renfort cylindrique dans une matrice carrée**

### **II.b – Équation simplifiée $E_m \ll E_f$**

Dans l'hypothèse :  $E_m \ll E_f \rightarrow \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \approx 1$

Dans ce cas, la valeur du module de Young transversal devient :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\arccos\left(-2\sqrt{\frac{\Phi_c}{\pi}}\right)}{\sqrt{1 - 4\frac{\Phi_c}{\pi}}} - 2\sqrt{\frac{\Phi_c}{\pi}}$$

Nous appellerons cette expression module transversal par ES2 (Équation Simplifiée 2dimensions)

## **Partie II – Modèle renfort cylindrique dans une matrice carrée**

### **II.c – Équation simplifiée hyperbolique**

Nous allons essayer d'exprimer le modèle par une allure hyperbolique dont :

\*l'ordonnée à l'origine vaut 1

\*l'asymptote verticale se trouve pour  $\Phi_c^{max} = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow R^2 = D^2$

dans ce cas, nous allons essayer de trouver une équation de la forme :  $\frac{E_c}{E_m} = \frac{A}{B - \Phi_c}$

de manière empirique, nous arrivons à :  $A = B = \frac{\pi/4}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}$

d'où l'expression :

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{\frac{\pi/4}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}}{\frac{\pi/4}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2} - \Phi_c}$$

Nous retiendrons finalement :

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{1}{1 - 4 \frac{\Phi_c}{\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}$$

Nous appellerons cette expression module transversale par HS2 (Hyperbole Simplifiée 2dimensions)

**Remarque 2 :** Dans l'expression HS2, nous pouvons remarquer que :  $\frac{E_c}{E_m} = \frac{1}{1 - k^2}$

avec  $k = 2 \sqrt{\frac{\Phi_c}{\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}$

## Partie II – Modèle renfort cylindrique dans une matrice carrée

### II.d - Courbes

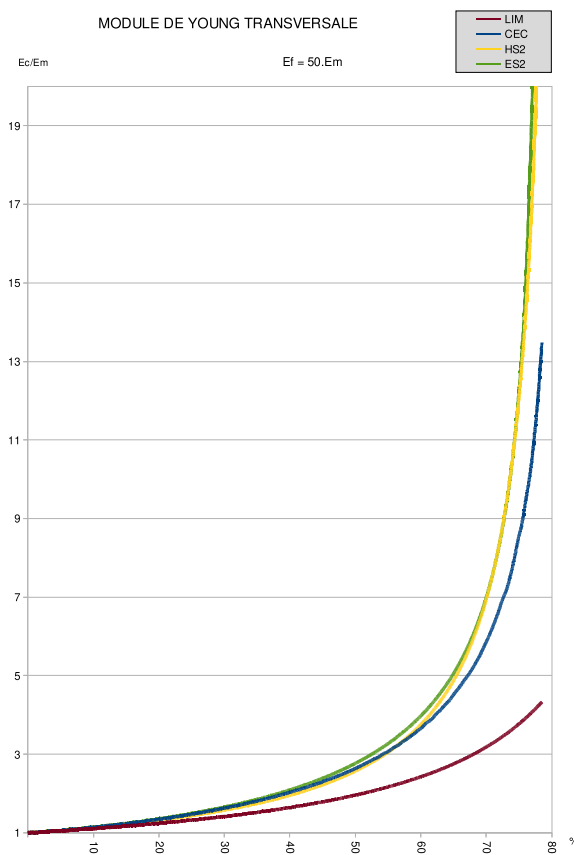
Dans cette partie, nous dressons les courbes que nous obtenons avec les expressions :

- CEC (Cylindrique Entourée Carrée)
- ES2 (Équation Simplifié 2dimensions)
- HS2 (Hyperbole Simplifiée 2dimensions)
- LIM (Loi Inverse des Mélanges)

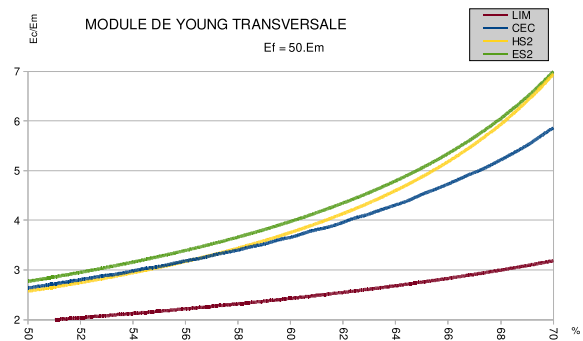
Nous regarderons les différentes allures pour des rapports  $E_f/E_m$  de 50, 100, et 250.

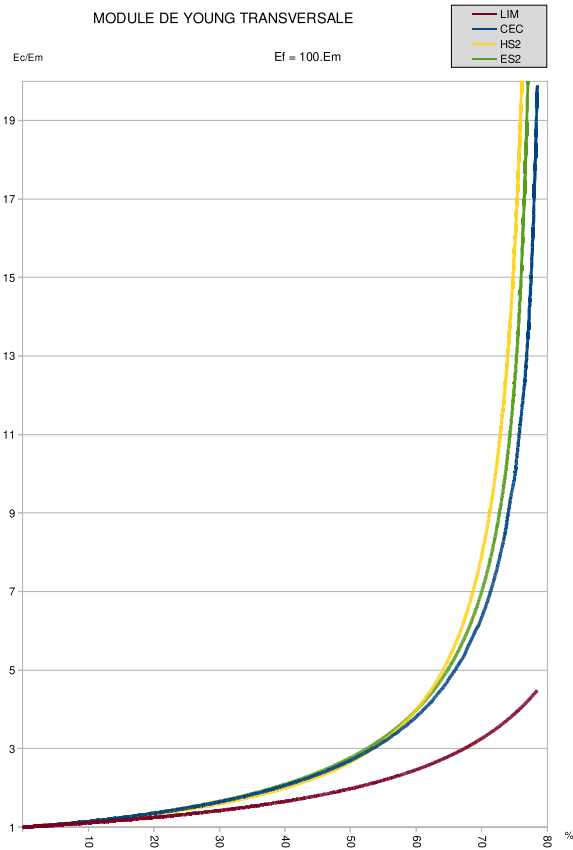
Quel que soit les rapports de module des ingrédients du composite, la courbe prédite par la loi inverse des mélanges est toujours très en dessous des modèles prenant en compte les formes géométriques.

De plus, les modèles simplifiés ES2 et HS2, et le modèle exacte CEC ont des courbes quasiment confondues en dessous de 60%. Nous pouvons alors nous demander quel est le niveau de précision/prédiction que nous voulons utiliser pour les composites dans le choix du modèle à adopter.

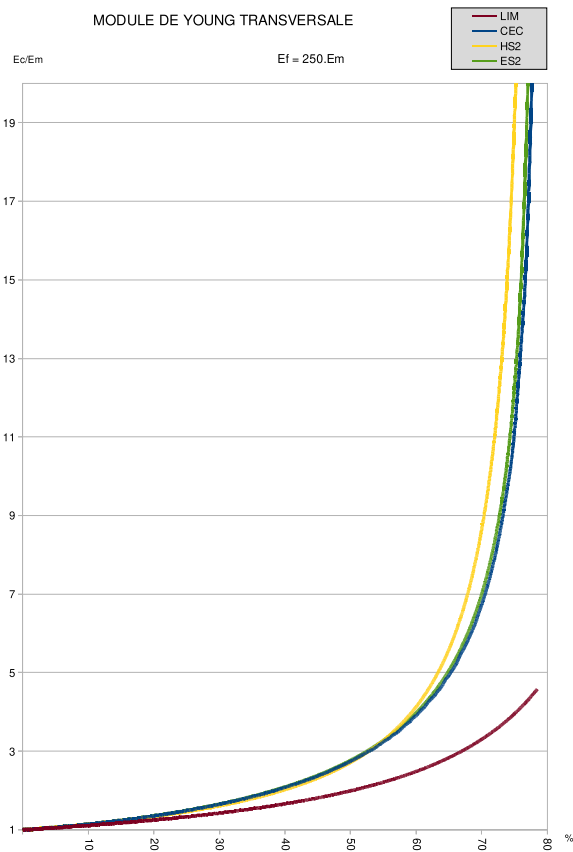
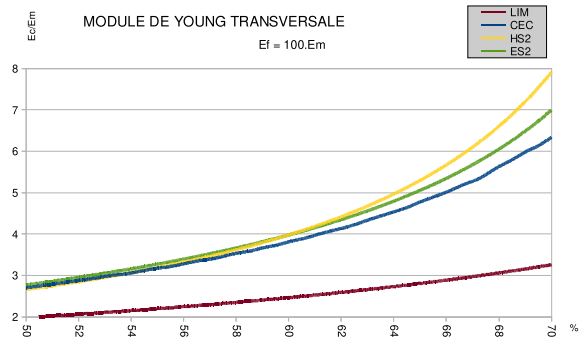


Pour un rapport de 50, les courbes ES2 et HS2 sont très proches entre elles. La courbe CEC est légèrement plus défavorable ; alors que la loi inverse des mélanges est très en dessous des trois autres.

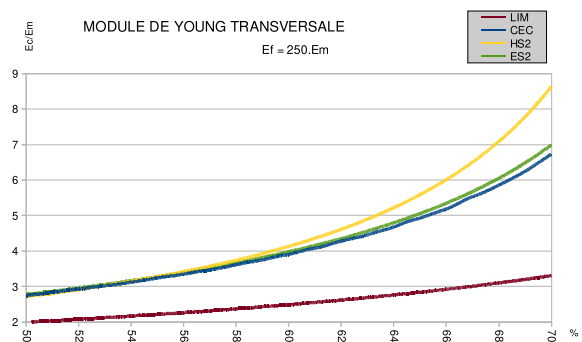




Pour un rapport de 100, nous constatons que les courbes CEC, ES2 et HS2 sont très proches les unes des autres ; tandis que la courbe LIM est très en dessous des trois autres.



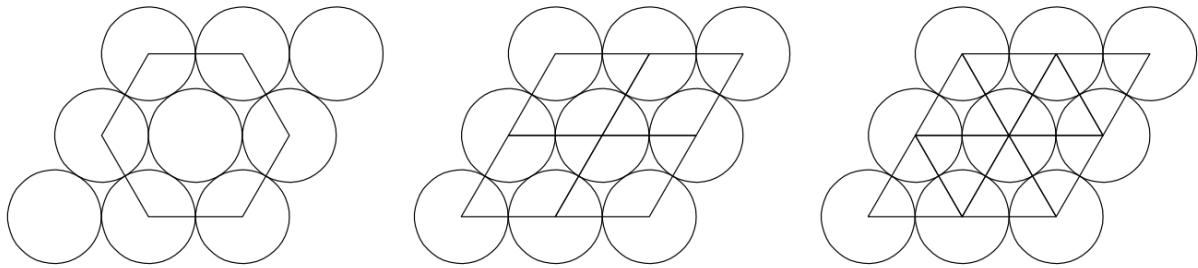
Pour un rapport de 250 les courbes CEC et ES2 sont quasiment confondues entre elle. Nous pouvons nous demander à partir de quel rapport  $E_f/E_m$  nous pouvons considérer l'approximation ES2 comme pertinente.



## **Partie III – Modèle renfort cylindrique dans une matrice hexagonale**

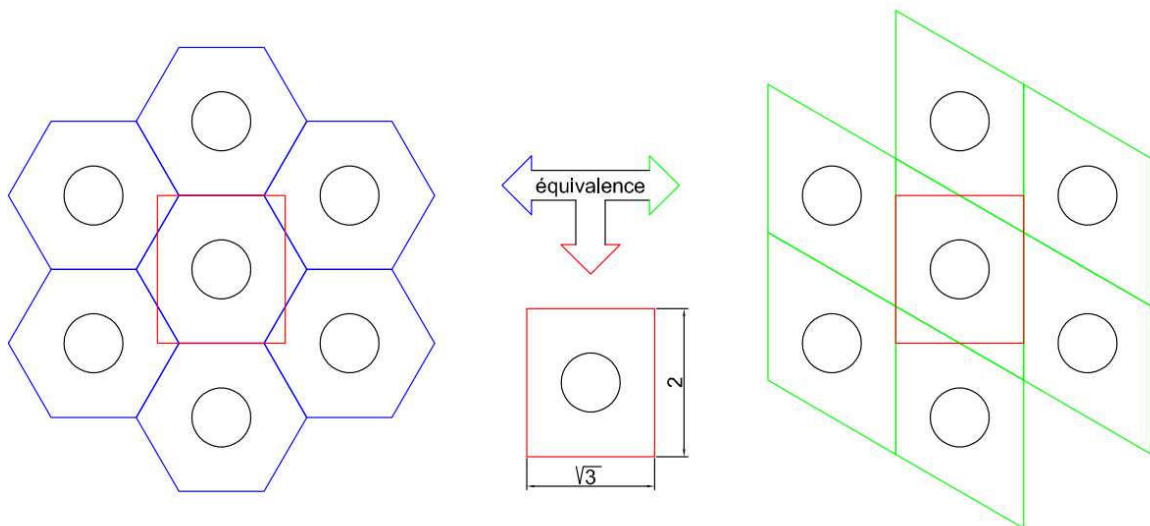
### **III.a – Limite de résolution analytique**

L'arrangement hexagonal régulier n'existe pas vraiment. C'est en réalité un arrangement en forme de losange régulier (dont le grand angle mesure le double du petit angle) ; qui peut être vu comme un arrangement triangulaire régulier également, dont nous excluons aussi l'utilisation. Nous avons utilisé le terme d'arrangement hexagonal pour le titre ; mais dorénavant, nous éviterons son appellation. La figure suivante nous montre les équivalences lorsque les cercles se touchent.



Cependant, la configuration losangée régulière va poser deux problèmes :

\* Le premier problème est mieux visualisé lorsque nous remarquons que le losange régulier peut être assimilée à un rectangle de rapport  $\sqrt{3}:2$ . Il existe alors un certain décalage des renforts qui impliquent que les diamètres peuvent être supérieurs au petit paramètre de la maille rectangulaire. Ainsi, lorsque le diamètre des renforts est suffisamment important, les renforts peuvent alors avoir une influence au-delà de leurs mailles propres. En-dessous d'un taux volumique que nous allons appeler taux intermédiaire et valant  $\frac{\sqrt{3}}{8} \pi \approx 68\%$ , qui satisfait généralement les taux usuels des composites, nous ne considérerons pas d'influence mutuelle des renforts entre maille. Cette valeur est trouvée dans le cas où le diamètre de la fibre vaut le petit côté du rectangle.



\* Le deuxième problème de cet arrangement des fibres amène à une totale orthotropie du composite. Lorsqu'une arête du losange est soit suivant  $\vec{y}$  ou  $\vec{z}$ , cela n'implique pas les mêmes valeurs de modules transversaux. Une première approche visuelle de la maille rectangulaire est de remarquer que suivant l'orientation du rectangle, la répartition de la matrice ne sera pas la même, donc sur la distribution des lignes d'effort non plus, et finalement les modules transversaux.

## Partie III – Modèle renfort cylindrique dans une matrice losangée

### III.b – Résolution sous taux intermédiaire

- Nous posons dans le cas général :

$$\begin{cases} b, \text{ longueur du rectangle suivant } \vec{y} \\ h, \text{ longueur du rectangle suivant } \vec{z} \\ l = \min(b, h) \\ \vec{y} = \cos(\theta) \vec{r} ; \vec{z} = \sin(\theta) \vec{r} \end{cases}$$

- Nous avons la relation pour retrouver le taux volumique :

$$\Phi_l = \frac{V_{fibre}}{V_{matrice}} = \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{b \cdot h} = \frac{\sqrt{3}\pi d^2}{8l^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_l}{\pi}} = \frac{d}{l}$$

- Nous pouvons alors écrire les équations du module intermédiaire par symétrie :

$$\int_{z=0}^{z=h/2} \frac{1}{E_b} \partial z = \int_{z=0}^{z=d/2 \cdot \sin(\theta)} \frac{1}{E_f} \partial z + \int_{z=d/2 \cdot \sin(\theta)}^{z=h/2} \frac{1}{E_m} \partial z$$

$$E_b = \frac{E_m}{1 - \frac{d}{h} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \sin(\theta)} = \frac{E_m}{1 - k \sin(\theta)}$$

avec :  $k = \frac{d}{h} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)$

Nous pouvons alors calculer le module transversal :

$$E_c = \frac{1}{b} \int_{y=-b/2}^{y=+b/2} \partial E_c \cdot \partial y = \frac{2}{b} \int_{y=0}^{y=b/2} \partial E_c \cdot \partial y$$

$$E_c = \frac{2}{b} \left( \int_{y=0}^{y=d/2} \frac{E_m}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \partial y + \int_{y=d/2}^{y=b/2} E_m \cdot \partial y \right)$$

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{d}{b} + \frac{2}{b} \int_{y=0}^{y=d/2} \frac{1}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \partial y$$

en faisant le changement de base :  $y = \frac{d}{2} \cdot \cos(\theta)$

$$\begin{cases} \partial y = -\frac{d}{2} \cdot \sin(\theta) \cdot \partial \theta \\ y = \frac{d}{2} \Leftrightarrow \theta = 0 \\ y = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2 \end{cases}$$

il vient la forme trigonométrique :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{d}{b} + \frac{h/b}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \partial\theta$$

En réutilisant l'intégrale calculée en I.d, il vient :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{d}{b} + \frac{h/b}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \frac{\arccos\left(-\frac{d}{h}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} - \frac{h}{b} \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}$$

- Dans le cas où le rectangle est debout :

$$\begin{cases} b = l \\ h = \frac{2}{\sqrt{3}}l \end{cases} \rightarrow \frac{d}{h} = \frac{\sqrt{3}d}{2l}$$

après simplification :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\pi/\sqrt{3}}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{2/\sqrt{3}}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \frac{\arccos\left(-\sqrt{2\sqrt{3}}\frac{\Phi_l}{\pi}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\right)}{\sqrt{1 - 2\sqrt{3}\frac{\Phi_l}{\pi}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} - \sqrt{\frac{8}{\sqrt{3}}\frac{\Phi_l}{\pi}}$$

Nous allons utiliser cette expression en LBB (Limite en Borne Basse)

- Dans le cas où le rectangle est couché :

$$\begin{cases} b = \frac{2}{\sqrt{3}}l \\ h = l \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d}{b} = \frac{\sqrt{3}d}{2l} \\ \frac{d}{h} = \frac{d}{l} \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\pi}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{\sqrt{3}/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \frac{\arccos\left(-\sqrt{\frac{8}{\sqrt{3}}}\frac{\Phi_l}{\pi}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\right)}{\sqrt{1 - \frac{8}{\sqrt{3}}\frac{\Phi_l}{\pi}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} - \sqrt{2\sqrt{3}}\frac{\Phi_l}{\pi}$$

Nous allons utiliser cette expression en LBH (Limite en Borne Haute)

L'arrangement losangé régulier est l'arrangement qui maximise la disposition des renforts. Cependant, cet arrangement crée une orthotropie. Nous allons alors considérer les deux valeurs de module transversal comme des bornes jusqu'au taux intermédiaire.

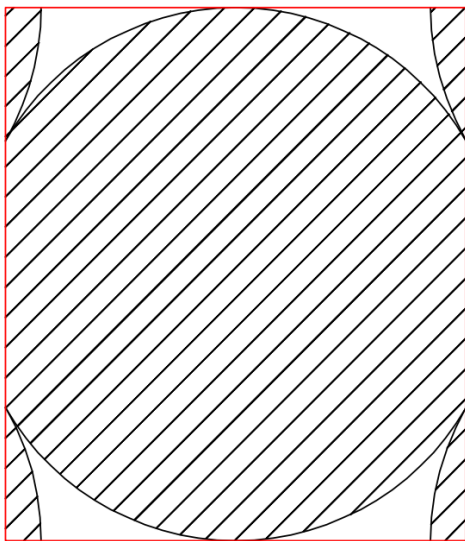
## **Partie III – Modèle renfort cylindrique dans une matrice losangée**

### **III.c – Problème après taux intermédiaire**

Au-delà du taux intermédiaire et toujours en considérant une matrice équivalente rectangulaire, les fibres voisines viennent dans le champ de calcul à la place de la matrice. Dans un arrangement losangé régulier, la géométrie nous amène à un taux théorique maximum de 90,7% de remplissage, ce qui est d'un intérêt évident (bien que peu réaliste car nous aurons des défauts de vide) ; mais avec une difficulté calculatoire supplémentaire.

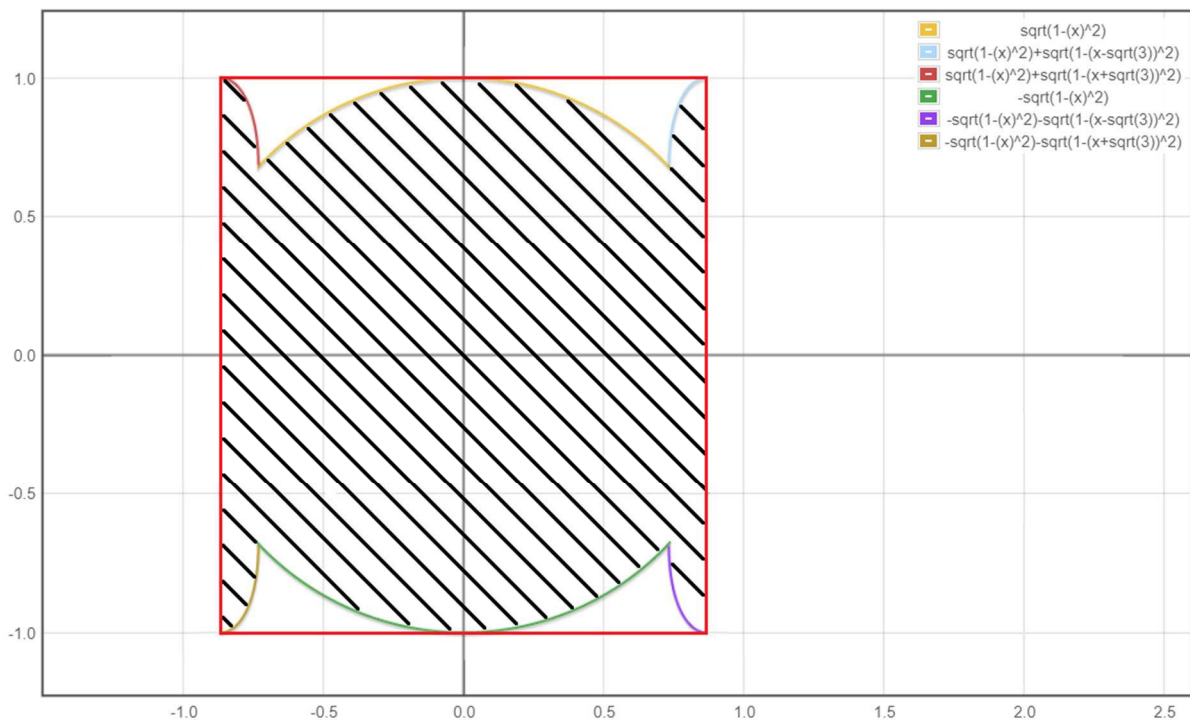
Pour mieux appréhender la difficulté au-delà du taux intermédiaire, nous vous proposons la visualisation du type de forme équivalente pour des renforts en contact les uns des autres.

#### **Dans la position debout (borne basse) :**

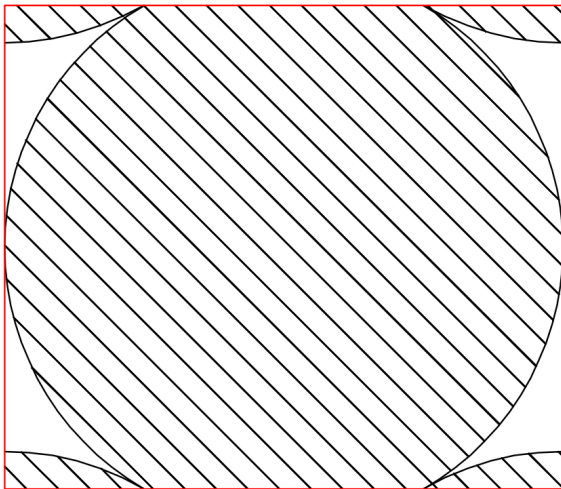


Dans la figure de gauche, le cadre rouge représente le bord à considérer pour un arrangement rectangulaire équivalent à un losange régulier ; et les hachurages sont les représentations des renforts.

Ci-dessous, nous aurions la forme équivalente que nous devrions réussir à résoudre pour être capable de calculer analytiquement le module transversal de la borne basse. La forme construite est simplement la quantité de matière le long de l'ordonnée ramenée sur les abscisses.

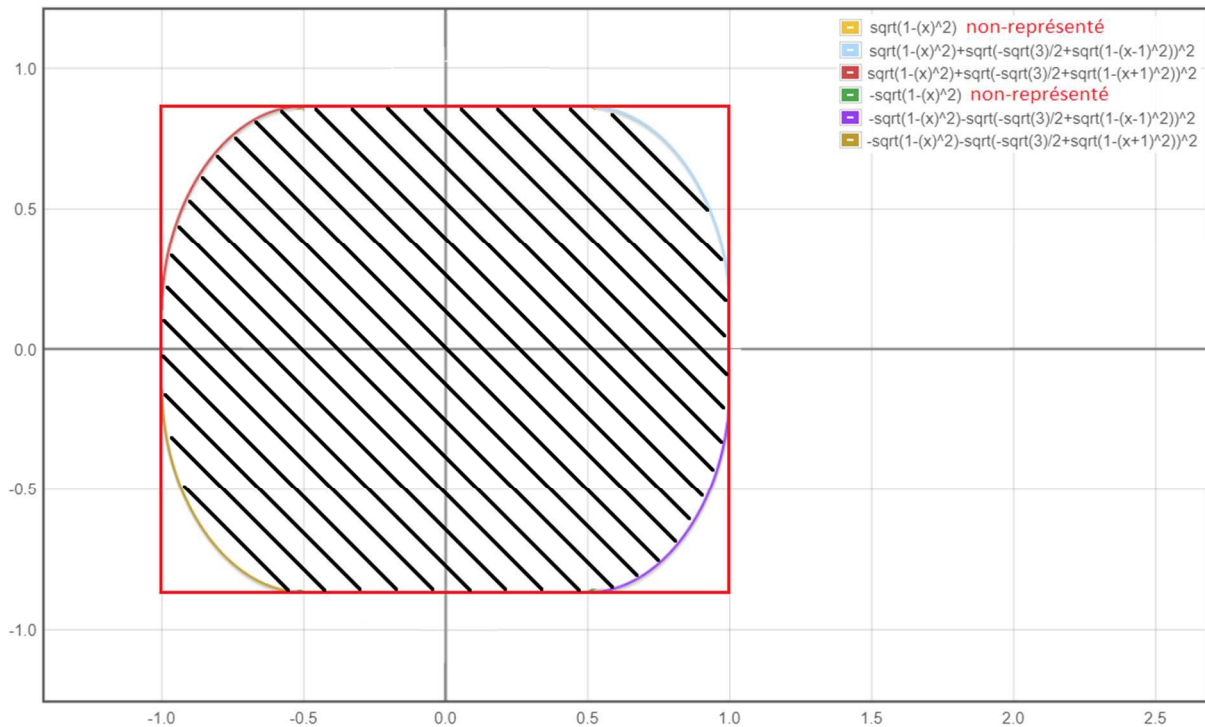


**Dans la position couché (borne haute) :**



Dans la figure de gauche, le cadre rouge représente le bord à considérer pour un arrangement rectangulaire équivalent à un losange régulier ; et les hachurages sont les représentations des renforts.

Ci-dessous, nous aurions la forme équivalente que nous devrions réussir à résoudre pour être capable de calculer analytiquement le module transversal de la borne basse. La forme construite est simplement la quantité de matière le long de l'ordonnée ramenée sur les abscisses.



Nous comprenons visuellement que la résolution au-dessus du taux intermédiaire pour une résolution analytique au-delà du taux intermédiaire devient rapidement compliquée, voire impossible.

Nous pourrions tout de même imaginer plusieurs approximations ou simplifications. Une résolution ignorant les influences mutuelles des renforts dans leurs mailles respectives ; ou bien en approximant les formes par des ovoïdes ou des ellipses. Dans ces considérations, l'équation de l'ovoïde ou de l'ellipse à prendre est le paramètre majeur pour être avoir la courbe la plus fidèle possible. La résolution numérique peut être aussi envisagée.

Dans la pratique, la LBB reste définie au-delà du taux intermédiaire ; alors que la LBH engendre un  $k > 1$  et sa définition n'est plus.

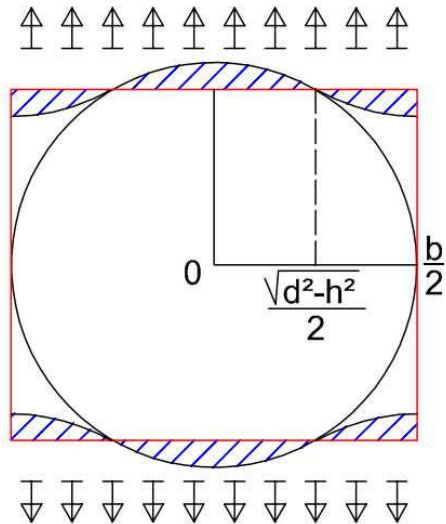


Lorsque nous comparons cette dernière formulation à l'expression de la LBB, l'expression que nous venons de trouver est très légèrement supérieure à la LBB et les deux courbes sont presque confondues. Dans ce cas, nous retiendrons simplement la LBB pour la borne basse en simplification qui est plus élégante et plus défavorable ; et qui reste définie après le taux intermédiaire.

**Dans la position couchée (borne haute) :**

Dans la position couchée, nous allons garder la simplification où nous ignorons les influences mutuelles des renforts voisins (hachurage en bleu)

Cependant, nous ne pouvons pas établir l'expression de la LBB après le taux intermédiaire comme pour l'approximation de la LBB. Il se passera deux phénomènes expliquant que la LBB n'est plus valide après le taux intermédiaire. En premier lieu, le coefficient  $k$  va rapidement passer supérieur à 1, ce qui implique la primitive va devoir être exprimé par l'expression calculer en I.e ; et une fois que le coefficient  $k$  devient supérieur à 1, la borne d'intégration  $[0 ; \pi/2]$  n'est plus continue. Il y aura une possibilité que  $k = 1$ , mais nous ne l'exprimerons pas car son intérêt est très limité.



Nous pouvons alors reprendre le calcul du module transversal :

$$E_c = \frac{2}{b} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{d^2-h^2}}{2}} E_f \cdot \partial y + \int_{y=\frac{\sqrt{d^2-h^2}}{2}}^{y=d/2} \frac{E_m}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \partial y + \int_{y=d/2}^{y=b/2} E_m \cdot \partial y \right)$$

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{d}{b} + \frac{E_f}{E_m} \sqrt{\left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{h}{b}\right)^2} + \frac{2}{b} \int_{y=\frac{\sqrt{d^2-h^2}}{2}}^{y=d/2} \frac{1}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \partial y$$

en faisant le changement de base :  $y = d/2 \cdot \cos(\theta)$

$$\begin{cases} \partial y = -d/2 \cdot \sin(\theta) \cdot \partial \theta \\ y = d/2 \leftrightarrow \theta = 0 \\ y = \frac{\sqrt{d^2-h^2}}{2} \leftrightarrow \theta = \arccos\left(\sqrt{1 - (h/d)^2}\right) \end{cases}$$

or :  $\sqrt{1 - (h/d)^2} = \cos(\arcsin(h/d)) \rightarrow \theta = \arccos\left(\sqrt{1 - (h/d)^2}\right) = \arcsin(h/d)$

d'où, la forme trigonométrique :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{d}{b} + \frac{E_f}{E_m} \sqrt{\left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{h}{b}\right)^2} + \frac{h/b}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \int_{\theta=0}^{\theta=\arcsin(h/d)} \frac{k \cdot \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \cdot \partial \theta$$

En exprimant par le taux volumique, nous avons :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \sqrt{2\sqrt{3}\frac{\Phi}{\pi}} + \frac{E_f\sqrt{3}}{E_m} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{8\Phi}{\sqrt{3}\pi} - 1} + \frac{\sqrt{3}/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \int_{\theta=0}^{\theta=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}\pi}{8\Phi}}\right)} \frac{k \cdot \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} \cdot d\theta$$

Enfin, suivant la valeur de  $k$ , l'expression devient :

- si  $k > 1$ , nous choisisons la primitive calculer en I.e qui amène à :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \sqrt{2\sqrt{3}\frac{\Phi}{\pi}} + \frac{E_f\sqrt{3}}{E_m} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{8\Phi}{\sqrt{3}\pi} - 1} + \frac{\sqrt{3}/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \left( \frac{\ln \left( \frac{\left(1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{8\Phi}}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{8\Phi}}}{\left(1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{8\Phi}}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{8\Phi}}} \right)}{\sqrt{\frac{8\Phi}{\sqrt{3}\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2 - 1}} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}\pi}{8\Phi}}\right) \right)$$

Nous appellerons cette expression par ABH (Approximation Borne Haute)

Lorsque nous dressons les courbes LBH et ABH, il y a une zone discontinue de quelques pourcentages qui vient des hypothèses de simplifications entre les bornes de calcul. Dans ce cas, nous pourrons envisager la forme suivante :

- si  $k < 1$ , alors nous choisisons la primitive calculer en I.d qui amène à :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \sqrt{2\sqrt{3}\frac{\Phi}{\pi}} + \frac{E_f\sqrt{3}}{E_m} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{8\Phi}{\sqrt{3}\pi} - 1} + \frac{\sqrt{3}}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \left( \frac{\arctan \left( \frac{\frac{\sqrt{\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{8\Phi} + \sqrt{8\Phi - \pi\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{8\Phi}}{\sqrt{3}\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}{\sqrt{1 - \frac{8\Phi}{\sqrt{3}\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} \right) + \arcsin \left( \sqrt{\frac{8\Phi}{\sqrt{3}\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \right)}{\sqrt{1 - \frac{8\Phi}{\sqrt{3}\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} - \frac{\arcsin \left( \sqrt{\frac{\sqrt{3}\pi}{8\Phi}} \right)}{2} \right)$$

Nous appellerons cette expression par TBH (Transition Borne Haute)

Cette dernière forme à un intérêt très limité car son domaine de validité concerne une zone très réduite des pourcentages.

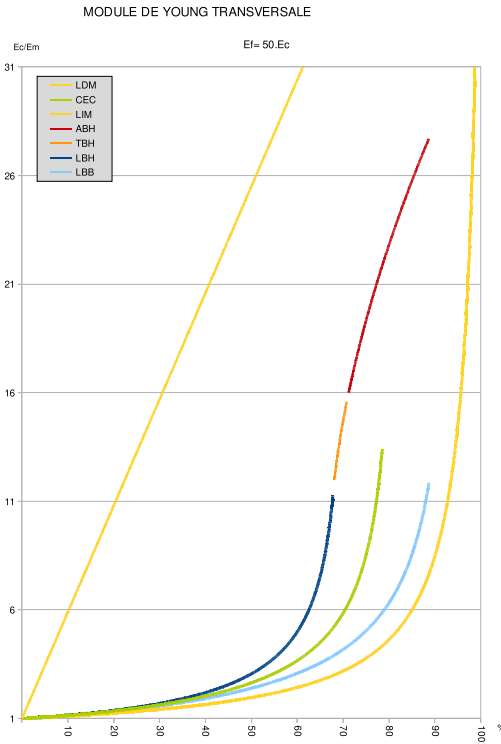
Nous remarquerons que la forme ABH infléchi l'évolution du module (voir chapitre suivant). Cela pourrait paraître surprenant, mais il ne faut oublier que la forme géométrique équivalente à considérer n'est plus une sphère, mais une ovoïde. En outre, la borne haute ne pourra jamais dépasser la droite de la loi des mélanges, qui reste en théorie le maximum sans considération géométrique.

Nous vous proposons d'aller voir en annexe II.b quelques valeurs de comparaison entre ces modèles analytiques simplifiés, et les modèles numériques avec les influences mutuelles.

# Partie III – Modèle renfort cylindrique dans une matrice losangée

## III.e – Courbes

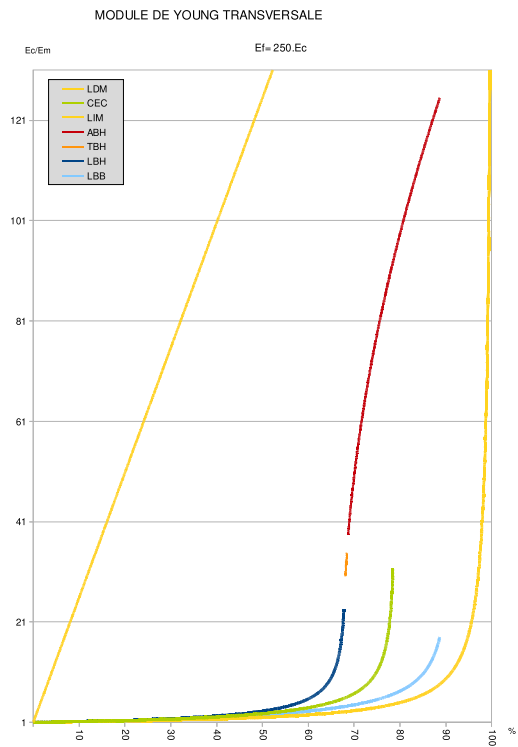
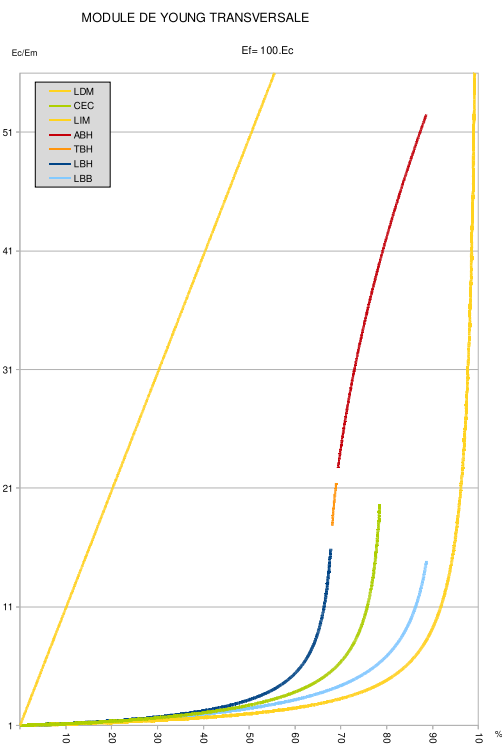
Le modèle arrangement losangé présente un composite à caractère orthotrope. Dans le cas d'un arrangement pseudo-aléatoire, c'est à dire que nous aurions une direction transversale favorisée par rapport à l'autre, nous pourrions alors considérer ces deux valeurs comme des bornes inférieures et supérieures du composite.



Nous pouvons constater un certain infléchissement des courbes de la borne haute à partir du taux intermédiaire. Cet infléchissement est la conséquence d'une déformation géométrique utilisée pour la partie calculatoire au-delà du taux intermédiaire.

De plus, nous avons rajouter la LDM (Loi Des Mélanges), qui reste la limite ultime que les modules des composites ne pourront jamais dépasser quel que soit les géométries des renforts (sans modification chimique de la nature individuel de la matrice/renfort).

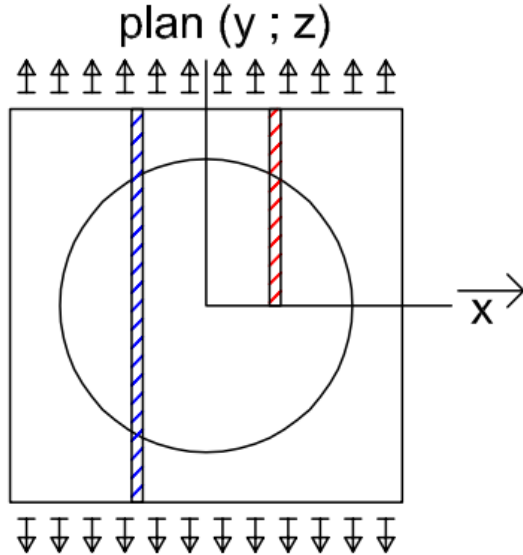
Enfin, la TBH ne représente pas un grand intérêt par sa faible amplitude de définition, mais assure la continuité graphique.



## Partie IV – Modèle en trois dimensions

### IV.a – Renfort sphérique dans matrice cubique

Dans la pratique, nous choisissons de décrire une sphère par des coordonnées sphériques. Cependant, ce n'est pas une obligation, nous pourrions tout aussi bien décrire une sphère comme un empilement de disques dans des coordonnées cylindriques. Après avoir résolu le module transversal cylindrique, pour passer à la particule nous allons procéder de la même manière que précédemment :



où :  $\begin{cases} C, \text{ paramètre de maille cubique} \\ D, \text{ est le diamètre du renfort} \\ d, \text{ le diamètre projeté sur } x \\ \vec{x} = \cos(\varphi) \vec{r} ; (\vec{y}; \vec{z}) = \sin(\varphi) \vec{r} \end{cases}$

- De la même façon que dans le chapitre II et III, nous écrivons :

$$E_s = \frac{1}{C} \int_{x=-C/2}^{x=+C/2} E_c \cdot \partial x = \frac{2}{C} \int_{x=0}^{x=C/2} E_c \cdot \partial x$$

$$E_s = \frac{2}{C} \left( \int_{x=0}^{x=D/2} \left\{ 1 - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{\arccos\left(-\frac{d}{C}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\right)}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{d}{C}\right)^2 \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} - \frac{d}{C} \right\} E_m \cdot \partial x + \int_{x=D/2}^{x=C/2} E_m \cdot \partial x \right)$$

$$\frac{E_s}{E_m} = \frac{2}{C} \left( \int_{x=0}^{x=D/2} \frac{\arccos\left(-\frac{d}{C}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\right)}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{d}{C}\right)^2 \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2}} \partial x - \int_{x=0}^{x=D/2} \frac{d}{C} \partial x + \int_{x=0}^{x=D/2} \left\{ 1 - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \right\} \partial x + \int_{x=D/2}^{x=C/2} \partial x \right)$$

De plus, nous avons  $d = D \cdot \sin(\varphi)$

$$\frac{E_s}{E_m} = 1 - \frac{\pi D}{2C} \frac{1}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{2}{C} \left( \int_{x=0}^{x=D/2} \frac{\arccos\left(-\frac{D}{C}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \sin(\varphi)\right)}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{D}{C}\right)^2 \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2 \sin^2(\varphi)}} \partial x - \int_{x=0}^{x=D/2} \frac{D}{C} \sin(\varphi) \cdot \partial x \right)$$

Nous faisons le changement de base :  $x = D/2 \cdot \cos(\varphi)$

$$\begin{cases} \partial x = -D/2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \partial \varphi \\ x = D/2 \leftrightarrow \varphi = 0 \\ x = 0 \leftrightarrow \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{E_s}{E_m} = 1 - \frac{\frac{\pi D}{2C}}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} + \frac{2}{C} \left( \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=0} \frac{\arccos\left(-\frac{D}{C}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\sin(\varphi)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{D}{C}\right)^2 \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2 \sin^2(\varphi)}} \left(\frac{-D}{2}\right) \sin(\varphi) \cdot \partial \varphi - \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=0} \frac{D}{C} \left(\frac{-D}{2}\right) \sin^2(\varphi) \cdot \partial \varphi \right)$$

$$\frac{E_s}{E_m} = 1 - \frac{\frac{\pi D}{2C}}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} - \left(\frac{D}{C}\right)^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \sin^2(\varphi) \cdot \partial \varphi + \underbrace{\frac{D/C}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \frac{\arccos\left(-\frac{D}{C}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)\sin(\varphi)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{D}{C}\right)^2 \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2 \sin^2(\varphi)}} \sin(\varphi) \cdot \partial \varphi}_{=I}$$

Nous posons l'expression  $I$ , qui sera traité à part et plus loin

$$\frac{E_s}{E_m} = 1 - \frac{\frac{\pi D}{2C}}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{C}\right)^2 + \frac{D/C}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} I$$

Cette intégrale a été séparée car : sous cette forme, nous ne trouvons pas la solution... Cependant, nous allons pouvoir contourner cette difficulté dans le chapitre suivant. Voici sont expression :

$$I = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \frac{\arccos(-k \cdot \sin(\varphi))}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \sin(\varphi) \cdot \partial \varphi = -\frac{\pi \ln(1 - k)}{2k}$$

avec  $k = \frac{D}{C} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)$

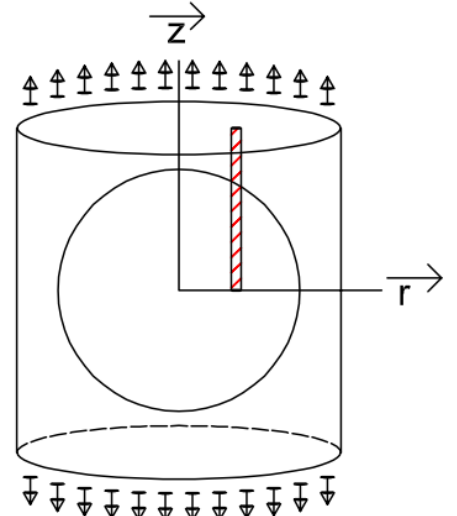
## Partie IV – Modèle en trois dimensions

### IV.b – Renfort sphérique dans une matrice cylindre assimilée cubique

Nous avons vu que chercher un modèle renfort sphérique dans une matrice cubique en passant deux fois par des intégrations devient très difficile mathématiquement avec une primitive dont nous ne trouvons pas de solution. Nous allons aborder différemment ce problème en considérant une matrice cylindrique avec un volume équivalent à un cube. Le calcul du module transversal n'étant pas dépendant des positions des bandes de module intermédiaire, la forme de la surface supportant la contrainte n'a donc pas d'influence.

Nous cherchons à exprimer le diamètre équivalent l'aire de la base du cylindre égale à l'aire d'une base carrée. La hauteur du cylindre et du cube sera de même valeur :

$$\begin{cases} A_{cyl} = \pi \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \\ A_{car} = C^2 \end{cases} \rightarrow \rho = \frac{2C}{\sqrt{\pi}}$$



- La relation entre  $D/C$  et le taux volumique est :

$$\Phi_s = \frac{V_{sphère}}{V_{cylindre}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3}{C^3} = \frac{\pi (D/C)^3}{6} \leftrightarrow \frac{D}{C} = \left(\frac{6}{\pi} \Phi_s\right)^{1/3}$$

- Nous pouvons alors reprendre le calcul de  $E_s$  moyenné sur la surface de travail.

$$E_s = \frac{4}{\pi \cdot \rho^2} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\rho/2} E_b \cdot r \cdot \partial r \cdot \partial \psi$$

que nous récrivons sous la forme :

$$E_s = \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \partial \psi \right\}}_{=1} \left\{ \frac{8}{\rho^2} \int_{r=0}^{r=\rho/2} E_b \cdot r \cdot \partial r \right\}$$

avec :  $\frac{C}{E_b} = \int_{z=-C/2}^{z=+C/2} \left\{ \frac{1}{E_f} + \frac{1}{E_m} \right\} \partial z$

Nous obtenons donc l'équation :

$$\frac{E_s}{E_m} = \frac{8}{\rho^2} \left( \int_{r=0}^{r=D/2} \frac{r}{1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{D}{C} \sin(\theta)} \partial r + \int_{r=D/2}^{r=\rho/2} r \cdot \partial r \right)$$

avec :  $\begin{cases} r = D/2 \cdot \cos(\theta) \leftrightarrow \partial r = -D/2 \cdot \sin(\theta) \cdot \partial \theta \\ r = D/2 \leftrightarrow \theta = 0 \\ r = 0 \leftrightarrow \theta = \pi/2 \end{cases}$

il vient :

$$\frac{E_s}{E_m} = \frac{8}{\rho^2} \left( \frac{\rho^2}{8} - \frac{d^2}{8} + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{D/2 \cdot \cos(\theta)}{1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{D}{C} \sin(\theta)} \frac{D \cdot \sin(\theta)}{2} d\theta \right)$$

$$\frac{E_s}{E_m} = 1 - \left(\frac{D}{\rho}\right)^2 + 2 \left(\frac{D}{\rho}\right)^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} d\theta$$

avec  $k = \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{D}{C}$

Cette primitive est relativement facile et elle est trouvée rapidement par des calculateurs d'intégrale et la vérification nous redonne bien la bonne expression. D'où :

$$\int \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} d\theta = \frac{k \cdot \sin(\theta) + \ln(1 - k \cdot \sin(\theta))}{-k^2}$$

Entre  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  la fonction  $k \cdot \sin(\theta)$  est comprise entre  $[0; +1]$ , donc l'expression dans ln est valide.

Nous obtenons alors :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \left(\frac{D}{\rho}\right)^2 + 2 \left(\frac{D}{\rho}\right)^2 \left[ \frac{\sin(\theta)}{-k} + \frac{\ln(1 - k \cdot \sin(\theta))}{-k^2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$

Finalement :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \left(\frac{D}{\rho}\right)^2 - \frac{2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \frac{CD}{\rho^2} - 2 \frac{\ln\left(1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{D}{C}\right)}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2} \left(\frac{C}{\rho}\right)^2$$

Nous exprimons un cylindre de base liée à sa hauteur, nous réutilisons :  $\rho = \frac{2C}{\sqrt{\pi}}$

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{C}\right)^2 - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \frac{D}{C} - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2} \ln\left(1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \frac{D}{C}\right)$$

L'expression décrite par son taux volumique devient alors :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\pi}{4} \left(\frac{6}{\pi} \Phi_s\right)^{2/3} - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \left(\frac{6}{\pi} \Phi_s\right)^{1/3} - \frac{\pi/2}{\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)^2} \ln\left(1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right) \left(\frac{6}{\pi} \Phi_s\right)^{1/3}\right)$$

Nous allons appeler cette expression du module par SEC (Sphère Entourée d'un Cube)

Cette expression nous permet de retrouver la valeur de l'intégrale  $I$  du chapitre précédent et ainsi contourner la difficulté calculatoire.

## **Partie IV – Modèle en trois dimensions**

### **IV.c – Équation simplifiée $E_m \ll E_f$**

De la même façon que pour le renfort fibrillaire, en considérant que le module du renfort très supérieur à la matrice, nous retenons :

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 - \frac{\pi}{4} \left( 2 + \left( \frac{6}{\pi} \Phi_s \right)^{1/3} \right) \left( \frac{6}{\pi} \Phi_s \right)^{1/3} - \frac{\pi}{2} \ln \left( 1 - \left( \frac{6}{\pi} \Phi_s \right)^{1/3} \right)$$

Nous appellerons cette expression du module par ES3 (Équation Simplifiée 3dimensions)

## **Partie IV – Modèle en trois dimensions**

### **IV.d – Équation simplifiée hyperbolique**

En reprenant la même approche que le modèle fibrillaire, c'est à dire une asymptote verticale au taux maximum théorique ; et de module de valeur 1 à l'ordonnée à l'origine, nous avons une courbe assez éloignée de la courbe exacte. Cependant, lorsque nous adaptions empiriquement la formule, nous obtenons une courbe plus fidèle d'expression :

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{1}{\left( 1 - 6 \frac{\Phi_s}{\pi} \left( 1 - \frac{E_m}{E_f} \right)^2 \right)^{2/3}}$$

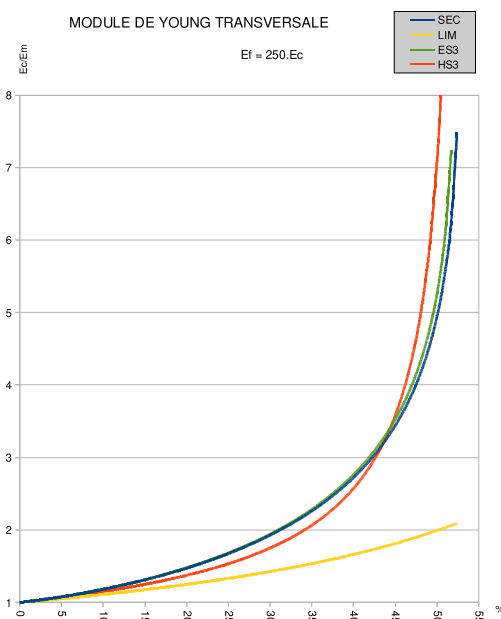
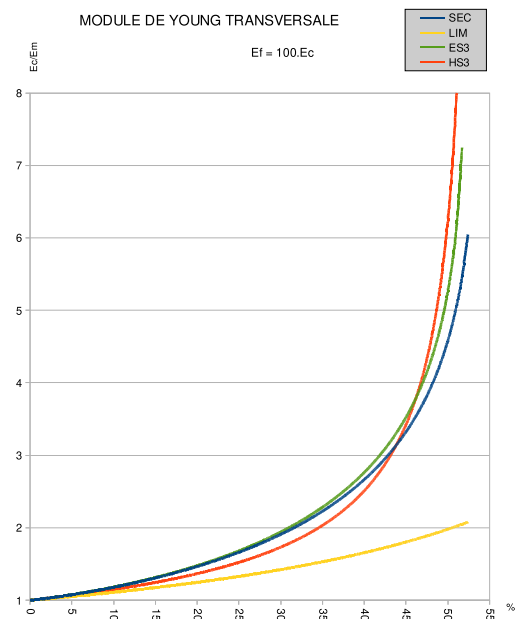
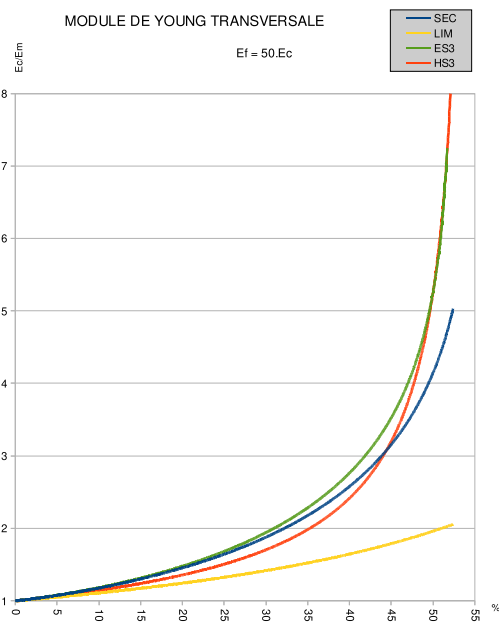
Nous appellerons cette expression du module par HS3 (Hyperbole Simplifiée 3dimensions)

## Partie IV – Modèle en trois dimensions

### IV.e – Courbes

Nous dressons les courbes pour comparer les trois modèles SEC, HS3, ES3, ainsi que la LIM pour des rapports  $E_f/E_m$  de 50, 100, et 250. Sans grande surprise, la LIM est très en dessous des trois autres prédictions.

Lorsque nous regardons l'impact du rapport module fibre/matrice sur le module final, nous constatons que le bénéfice est faible par rapport à la rigidité du renfort. Pour donner un exemple plus explicite : vaut-il mieux mettre peu de charge de carbone à module élevé ; ou moyennement de charge de verre à module moyen pour avoir un module final équivalent ?



## Discussions

J'établis plusieurs points de discussions sur le modèle et sa résolution.

### Point A :

Dans l'annexe I, je fais remarquer un problème sur le choix des bornes trigonométriques d'intégration. J'avoue que je ne suis pas sûr d'avoir les bonnes explications pour interpréter ces différentes mauvaises valeurs obtenues, alors je les aborde et mais je ne m'engage pas sur les explications. Au début, je pensais que la forme d'écriture hybride était le problème ; mais en travaillant dessus, je me suis rendu compte que c'est avant tout un raccourci d'écriture pratique.

Dans les annexes II, je compare les valeurs analytiques que j'obtiens avec les formules tout le long cette publication et je compare les écarts avec les valeurs fait sur un tableur numérique.

Enfin, étant étudiant à l'heure de la rédaction, je propose des modèles mais je ne dispose que de peu de valeurs expérimentales. Si j'avais la possibilité, j'aurais naturellement fait des comparaisons.

### Point B :

Dans l'établissement des équations, j'ai supposé :

- influence cisversale négligée
- complète transmission des efforts inter et intra maillage
- forme simple cylindrique et sphérique (sauf approximation chapitre III.d)
- dispersion nulle des diamètres (une seule valeur de diamètre)
- connaissance des modules (transversaux pour les fibres)
- arrangement aléatoire et pseudo-aléatoire

### Point C :

Il ne faut pas oublier que les modèles que je propose sont des modèles simplifiés (plus abouti que la loi des mélanges), mais l'influence cisversale devrait prédire des modèles plus fidèle encore ; cependant leurs résolutions restent très difficiles. Prendre en compte la cisversalité signifie que l'on est capable d'intégrer les déviations des lignes d'effort à travers le matériau. La déformation cisversale à forcément une influence sur le module transversal. Cependant comment prendre en compte les influences transversale-cisversale de manière analytique... ???

De plus, je n'ai rien trouvé dans la littérature pour caractériser les coefficients de Poisson des fibres seules ; les coefficients de Poisson qui sont admis sont calculés des extrapolations d'un composite ; ou d'un bloc de verre pour les fibres de verre. Cependant, il me semble « possible » de caractériser les coefficients de Poisson des fibres seules par phénomène de diffraction par un fil.

### Point D :

La parfaite transmission des efforts à travers les différents matériaux est bien sûr l'hypothèse la plus importante. Un vide va forcément créer une faiblesse de la structure. De plus, cette mise en équation suppose que même si les renforts se touchent, les efforts restent transmissibles. Cette hypothèse est bien évidemment fausse dans la pratique.

Enfin on n'oubliera pas que la contrainte est un concept qui découle de la force. Quand on parle de ligne de force d'intensité variée dans l'introduction, il ne faut pas oublier que le matériau est supposé très grand et donc les efforts arrivent « distribués » sur le maillage des modèles.

#### Point E :

La forme du renfort est un facteur important et une forme exotique rend la théorisation encore plus difficile analytiquement. Nous pouvons en voir un exemple au chapitre III.d, mais des taux maximums supérieurs pourront être envisagés. De mon avis, la forme est vraiment problématique pour des composites à dispersion particulaire, notamment lorsque ce sont des charges naturelles types argiles qui n'ont pas de formes simples et uniques. Cependant, ce n'est peut-être pas impossible...

#### Point F :

On suppose que les renforts n'ont qu'une seule taille. Tenir compte d'une dispersion des fibres ou particules ne sont pas incompatibles avec les modèles présentés. De plus, une variation des modèles permettrait d'aller au-delà des limites proposées. Par exemple, un renfort fibrillaire plus petit sur un site interstitiel en arrangement carré permettrait un taux théorique à 92%.

#### Point G :

Les modules transversaux des fibres sont pris sur les modules longitudinaux et impliquent que les renforts fibrillaires sont des matériaux isotropes. Il est admis que les fibres de carbone et de verre sont des isotropes (chose dont je ne suis pas certain à 100%) ; alors que les fibres d'aramide sont considérées comme isotropes transverses.

#### Point H :

J'ai pu établir des équations exprimant :

- un renfort fibrillaire dans un arrangement carré
- un renfort fibrillaire dans un arrangement losangé régulier
- un renfort particulaire dans un arrangement cubique

On peut se demander alors quelles équations choisir ?

Si l'on fait une expérience de pensée : les renforts sont suspendus de manière aléatoire dans la matrice. Si l'on suppose que les renforts sont en « moyenne » autour d'une position régulière, alors on peut les approximer comme étant toujours inclus dans une maille. De plus, les équations des modules intermédiaires (suivant  $\vec{z}$ ) nous indiquent que la position du renfort dans la maille n'a pas d'influence ; enfin les équations des modules transversaux ne dépendent pas de la position des bandes de module intermédiaire (suivant  $\vec{y}$  et  $\vec{x}$ ). La « magie » du hasard et des probabilités fait que les positions randomisées des renforts impliquent des positions aléatoires ou pseudo-aléatoires.

On pourra remarquer que l'arrangement losangé régulier (ou pseudo-aléatoire) implique que le composite devient un matériau orthotrope et donne une borne haute et une borne basse plus étroite que les bornes de Reuss et Voigt ; alors qu'un arrangement carré (aléatoire) implique que le composite devienne un matériau isotrope transverse. À mon avis, le module transversal dépend surtout de la mise en œuvre du composite. On peut penser qu'une mise en œuvre sous vide crée un arrangement forcé vers les positions les plus compactes tel qu'un arrangement pseudo-aléatoire ; alors que le moulage aura tendance à laisser les fibres en suspension et elles tendraient plus vers un arrangement aléatoire ; tandis que l'injection changerait la géométrie encore différemment.

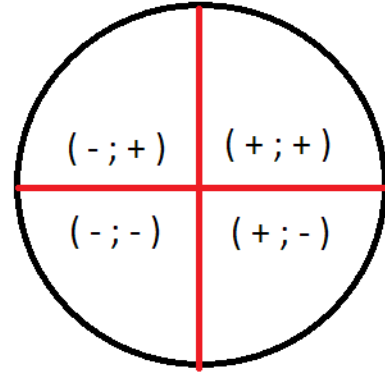
La production d'un composite sous vide est plutôt une technique appliquée au fibre, donc je n'ai pas senti l'utilité de développer plus de modèles pour les composites particuliers. Mais une résolution comprenant un arrangement autre que cubique est possible, mais juste plus compliquée et nombreuses, car plusieurs arrangements sont alors possibles.

Enfin, l'hypothèse d'un arrangement autre qu'aléatoire implique qu'un composite ayant un module plus élevé dans une direction aura un module plus faible dans une autre.

## Annexe I

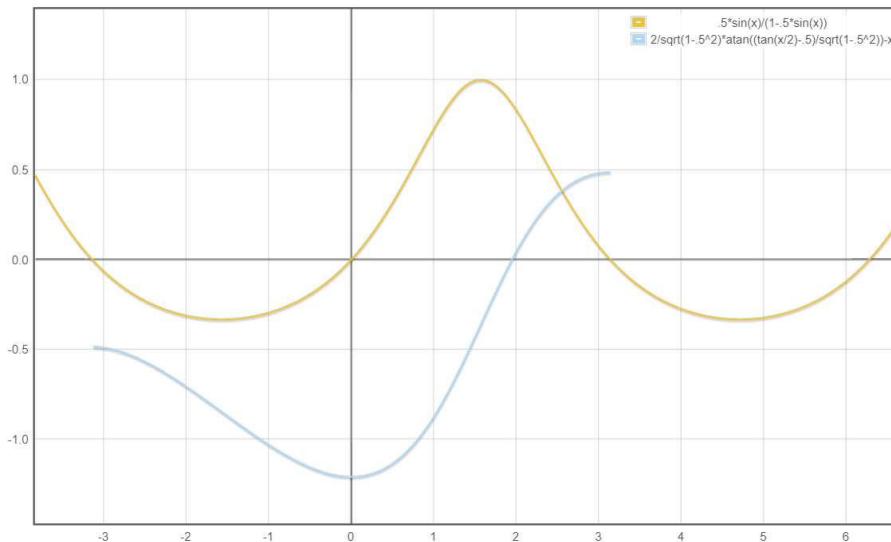
Pour l'annexe, nous nommerons les quartiers d'angle :

$$\begin{cases} [0; \pi/2] \leftrightarrow (+; +) \\ [\pi/2; \pi] \leftrightarrow (-; +) \\ [-\pi/2; 0] \leftrightarrow (+; -) \\ [-\pi; -\pi/2] \leftrightarrow (-; -) \end{cases}$$



- Dans la partie II et III, nous avons utilisé la primitive :

$$\int \frac{k \cdot \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} d\theta = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - k}{\sqrt{1 - k^2}}\right) - \theta$$



Le coefficient  $k$  doit être compris entre  $]0; 1[$ . Pour illustrer, nous avons choisi  $k = 0,5$ .

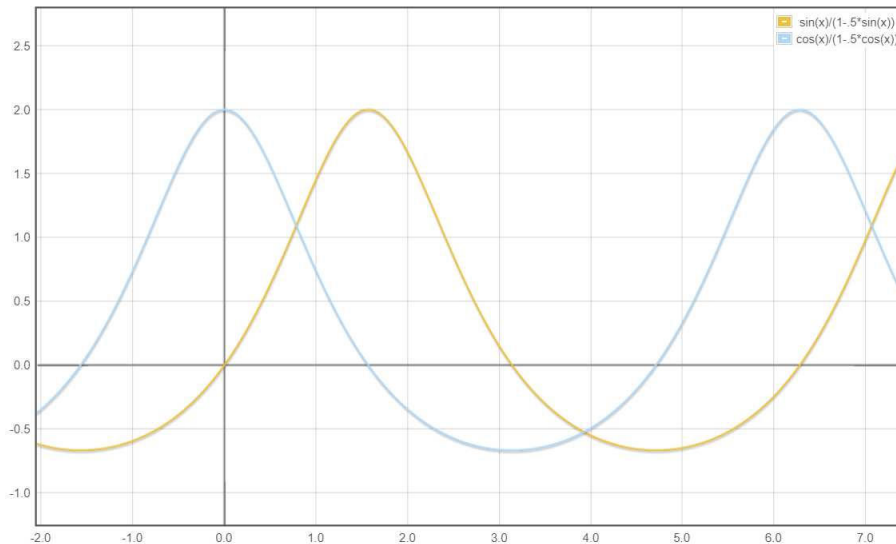
Lorsque nous considérons la fonction sur les quartiers  $(+; +)$  et  $(-; +)$  ; et la fonction sur les quartiers  $(-; -)$  et  $(+; -)$ , nous pouvons remarquer que ces quartiers ne donnent pas les mêmes valeurs d'intégrations. Nous pourrions nous dire que l'expression trigonométrique de la borne haute n'a de réalité que sur les quartiers supérieurs qui décrivent le demi-cercle supérieur...

**Remarque de l'auteur :** L'expression du sinus décrit un cercle ! Un cercle de rayon constant quelques soit son angle. Je trouve cela étrange qu'entre les deux demi-sphères supérieure et inférieure, les aires des courbes ne soient pas de valeurs comparables.

- La solution existe aussi par une expression de cosinus :

Nous avons abordé la résolution par l'ordre d'intégration ordonnées → abscisses, mais il est aussi possible d'exprimer la résolution par une orientation trigonométrique de  $90^\circ$  qui amènerait à :

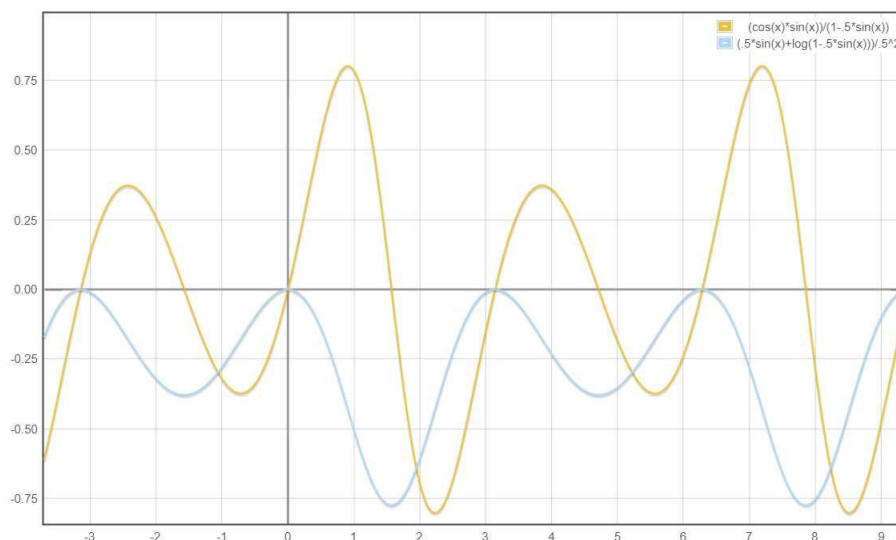
$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{k \cdot \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} d\theta \leftrightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{k \cdot \cos(\theta)}{1 - k \cdot \cos(\theta)} d\theta$$



Dans la forme cosinus ou sinus, nous avons de manière prévisible les courbes décalées de  $\pi/2$ . Dans cette configuration, ce sont les quartiers (+ ; +) et (+ ; -) qui donnent les valeurs attendues.

- Dans la partie IV concernant le modèle particulière :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} d\theta = \frac{k \cdot \sin(\theta) + \ln(1 - k \cdot \sin(\theta))}{-k^2}$$

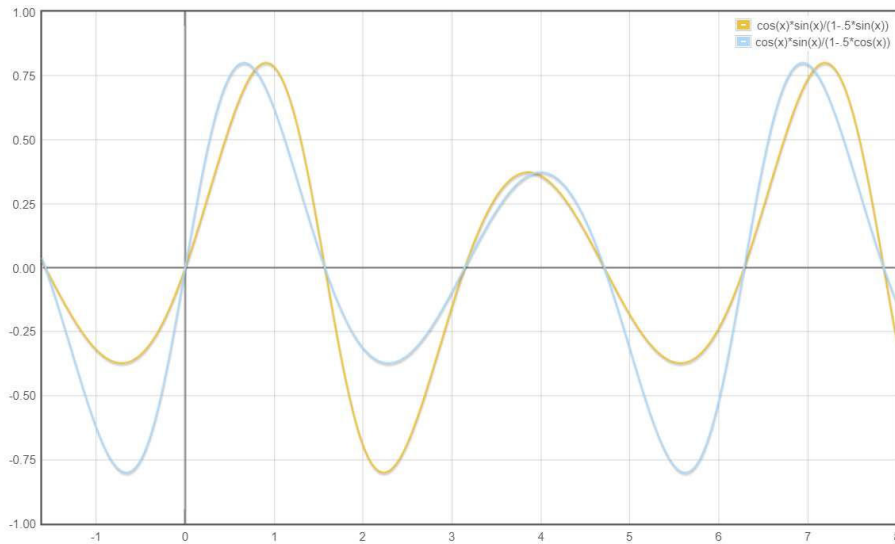


Le coefficient  $k$  doit être compris entre  $]0; 1[$ . Pour illustrer, nous avons choisi  $k = 0,5$ .

Les quartiers (+; +) et (-; +) donnent les mêmes valeurs d'aire en absolues mais de signes opposées entre elles ; nous pouvons faire la même remarque pour les quartiers (+; -) et (-; -).

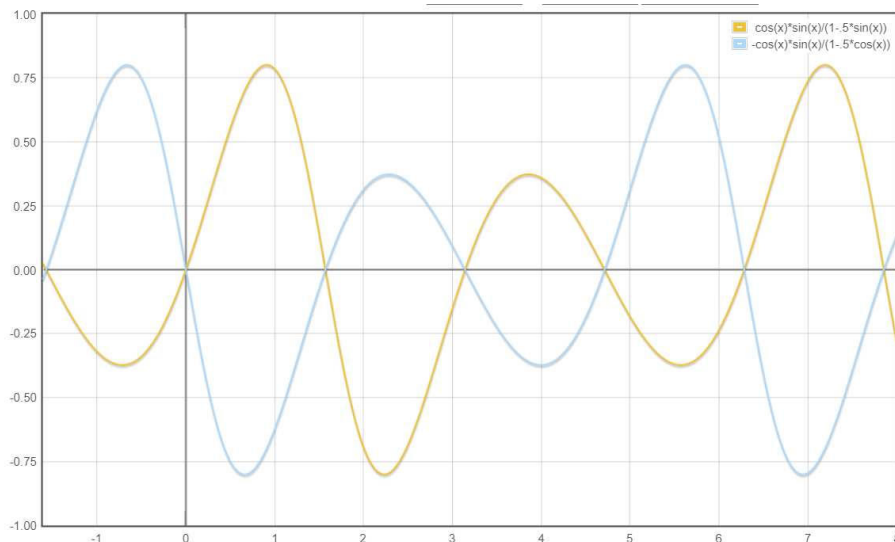
- Il est également possible de passer de la forme sinus à cosinus :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{1 - k \cdot \sin(\theta)} d\theta \leftrightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{1 - k \cdot \cos(\theta)} d\theta$$



Sur le quartier (+; +), l'aire calculée serait de mêmes valeurs par la forme sinus ou cosinus. Cependant, la similarité entre les deux courbes n'est pas flagrante tout de suite.

- en multipliant l'une des deux courbes par (-1), le décalage de  $\pi/2$  devient alors flagrant



**Remarque de l'auteur :** Dans la résolution du modèle à trois dimensions, seulement un quartier nous donne la valeur qui nous permet d'obtenir des valeurs similaires avec le modèle numérique.

Il semblerait que les bornes d'intégrations à prendre soient les bornes qui impliquent les valeurs positives des sinus et des cosinus. Cependant, je trouve que le choix de la borne est « bizarre », et je n'ai pas d'explication.

## Annexe II.a

Nous donnons dans cet annexe les écarts relatifs que nous avons obtenu entre les valeurs obtenues numériquement et par les formules dans les différents cas.

Les valeurs numériques pour le modèle fibrillaire sont calculées par un tableur OpenOffice de :

- $n$  valeurs d'échantillonnage centré en maille carrée ou rectangulaire
- un rapport de module  $E_f/E_m$
- un rapport de volume  $\Phi$
- une forme de la matrice carrée ou rectangulaire assimilé au losange régulier
- écart =  $\frac{V_{numérique} - V_{formule}}{V_{formule}}$

Pour le modèle 2D renfort cylindrique dans une matrice carrée et losangée régulière, nous proposons :

$$n = 1024 ; 2048 ; \quad \frac{E_f}{E_m} = 100 ; 200 ; 500 ; \quad \Phi = \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{9}$$

Les valeurs sont données pour :  $E_c/E_m$

Ef/Em	$\Phi$	forme	valeur exacte	valeurs numérique		ecart		précision
				n= 1024	n= 2048	n= 1024	n= 2048	
100	$\pi/4 = 78,5\%$	couchée	NA					
		carrée	19.619 454 427	19.927 529 297	19.922 768 555	-1.57E-02	-1.55E-02	plus
		debout	NA					
	$\pi/6 = 52,4\%$	couchée	3.503 509 168	3.497 050 781	3.497 031 250	1.84E-03	1.85E-03	moins
		carrée	2.910 664 088	2.905 361 328	2.905 537 109	1.82E-03	1.76E-03	plus
		debout	2.580 915 430	2.578 115 234	2.578 222 656	1.08E-03	1.04E-03	plus
	$\pi/9 = 34,9\%$	couchée	1.932 508 372	1.932 871 094	1.932 900 391	-1.88E-04	-2.03E-04	moins
		carrée	1.827 548 528	1.827 626 953	1.827 626 953	-4.29E-05	-4.29E-05	moins
		debout	1.750 410 185	1.750 615 234	1.750 556 641	-1.17E-04	-8.37E-05	plus
200	$\pi/4 = 78,5\%$	couchée	NA					
		carrée	28.261 594 177	29.172 226 563	29.154 887 695	-3.22E-02	-3.16E-02	plus
		debout	NA					
	$\pi/6 = 52,4\%$	couchée	3.576 832 028	3.570 048 828	3.570 019 531	1.90E-03	1.90E-03	moins
		carrée	2.950 652 039	2.945 410 156	2.945 644 531	1.78E-03	1.70E-03	plus
		debout	2.607 339 452	2.604 394 531	2.604 492 188	1.13E-03	1.09E-03	plus
	$\pi/9 = 34,9\%$	couchée	1.946 057 179	1.946 474 609	1.946 430 664	-2.15E-04	-1.92E-04	plus
		carrée	1.838 054 747	1.837 890 625	1.837 866 211	8.93E-05	1.03E-04	moins
		debout	1.758 956 311	1.759 062 500	1.759 091 797	-6.04E-05	-7.70E-05	moins
500	$\pi/4 = 78,5\%$	couchée	NA					
		carrée	44.344 645 704	48.173 154 297	48.087 885 742	-8.63E-02	-8.44E-02	plus
		debout	NA					
	$\pi/6 = 52,4\%$	couchée	3.622 765 568	3.615 937 500	3.615 839 844	1.88E-03	1.91E-03	moins
		carrée	2.975 314 770	2.969 863 281	2.970 019 531	1.83E-03	1.78E-03	plus
		debout	2.623 512 471	2.620 244 141	2.620 307 617	1.25E-03	1.22E-03	plus
	$\pi/9 = 34,9\%$	couchée	1.954 317 653	1.954 541 016	1.954 565 430	-1.14E-04	-1.27E-04	moins
		carrée	1.844 439 643	1.844 316 406	1.844 257 813	6.68E-05	9.86E-05	moins
		debout	1.764 138 272	1.764 257 813	1.764 277 344	-6.78E-05	-7.88E-05	moins

La colonne « précision » nous indique entre 1024 et 2048 échantillon, si l'écart augment ou diminue avec le nombre d'échantillonnage. Bien que nous n'ayons pas une augmentation systématique de la précision, les écarts sont déjà plutôt bons avec un minimum de l'ordre de 2%.

Nous n'oublions pas que nous ne pouvons pas avoir les valeurs analytiques au-delà des 68% dans un arrangement losangé régulier (forme couchée ou debout).

Enfin, il aurait été plus intéressant d'avoir des valeurs avec un échantillonnage plus important, cependant, cette manipulation entraîne trop de crash logiciel de OpenOffice 4.1.7 sous Windows10.

## Annexe II.b

Cet annexe concerne le modèle des renforts cylindriques dans une matrice losangée régulière, et au-delà du taux intermédiaire. Nous proposons ici les valeurs que nous obtenons par la simplification analytique par la négligence des influences mutuelles ; les valeurs obtenues par un tableur numérique de 1024 échantillonnages ; ainsi que les écarts relatifs.

- Dans l'approximation de la borne basse :

Ef/Em	taux volumique	numérique	ABB	LBB	écart ABB	écart LBB
50	debout 70	4.177 140 625	4.174 689 688	4.176 261 702	5.87E-04	2.10E-04
	debout 80	6.406 768 555	6.295 645 864	6.323 536 697	1.77E-02	1.32E-02
	debout 90	15.733 817 383	13.823 805 786	13.902 529 854	1.38E-01	1.32E-01
100	debout 70	4.360 190 430	4.357 688 789	4.359 278 859	5.74E-04	2.09E-04
	debout 80	6.933 433 594	6.817 668 151	6.845 955 964	1.70E-02	1.28E-02
	debout 90	21.375 882 813	18.919 831 920	18.999 877 991	1.30E-01	1.25E-01
250	debout 70	4.479 590 820	4.477 067 562	4.478 668 488	5.64E-04	2.06E-04
	debout 80	7.304 624 023	7.185 974 810	7.214 502 373	1.65E-02	1.25E-02
	debout 90	28.984 325 195	26.010 558 872	26.091 406 807	1.14E-01	1.11E-01

Nous pouvons constater que les valeurs de la ABB et de la LBB sont sensiblement les mêmes. La formulation de la ABB étant bien plus lourde et plus longue que la LBB, nous pouvons simplement retenir la formule de la LBB pour prédire la limite basse théorique des composites.

- Dans l'approximation de la borne haute

Ef/Em	taux volumique	numérique	TBH	ABH	écart
50	couché 70	14.701 849 609	14.700 015 526		1.25E-04
	couché 80	22.896 032 227		22.811 760 485	3.69E-03
	couché 90	30.544 656 250		28.358 075 221	7.71E-02
100	couché 70	24.380 101 563		24.375 996 290	1.68E-04
	couché 80	42.252 584 961		42.163 173 338	2.12E-03
	couché 90	56.935 115 234		53.879 515 876	5.67E-02
250	couché 70	50.072 188 477		50.060 368 772	2.36E-04
	couché 80	98.466 409 180		98.370 606 476	9.74E-04
	couché 90	133.025 485 352		129.005 526 938	3.12E-02

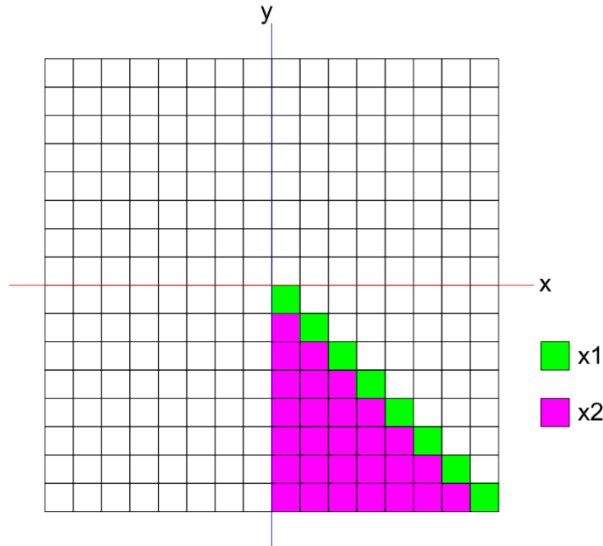
Nous constatons que les valeurs prédites par les approximations du modèle approché par négligence sont plutôt proches des valeurs obtenues numériquement.

Le choix d'utiliser l'approximation par négligence semble rester intéressante.

## Annexe II.c

Pour le modèle sphérique, nous ajoutons :

- une forme cubique
- $m = n$  valeurs dans la deuxième direction cisversale.



Le passage à la troisième dimension devient plus lourd pour l'outil simple de tableur, nous avons alors adapter le modèle sphérique dans une matrice cubique par un échantillonnage d'un huitième de cube. Nous n'oublions alors pas de mettre les échantillons le long de la diagonale par un coefficient 1, et les autres valeurs par 2.

La figure ci-contre est un exemple de la façon utilisée pour alléger numériquement le tableur OpenOffice.

Pour le modèle 3D renfort sphérique, nous proposons :

$$(n; m) = (128 ; 64) ; (256 ; 128) ; \frac{E_f}{E_m} = 100 ; 200 ; 500 ; \Phi = \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{9} ; \frac{\pi}{12}$$

Ef/Em	$\Phi$	valeur exacte	valeurs numérique		ecart		précision
			(n;m)=(128;64)	(n;m)=(256;128)	(n;m)=(128;64)	(n;m)=(256;128)	
100	$\pi/6 = 52,4\%$	6.048 830 396	6.008 562 500	6.008 625 000	6.66E-03	6.65E-03	plus
	$\pi/9 = 34,9\%$	2.221 581 093	2.222 046 875	2.222 031 250	-2.10E-04	-2.03E-04	plus
	$\pi/12 = 26,2\%$	1.716 046 334	1.715 093 750	1.715 085 938	5.55E-04	5.60E-04	moins
200	$\pi/6 = 52,4\%$	7.124 287 681	7.042 234 375	7.042 375 000	1.15E-02	1.15E-02	plus
	$\pi/9 = 34,9\%$	2.248 495 152	2.249 078 125	2.249 007 813	-2.59E-04	-2.28E-04	plus
	$\pi/12 = 26,2\%$	1.727 309 094	1.726 375 000	1.726 335 938	5.41E-04	5.63E-04	moins
500	$\pi/6 = 52,4\%$	8.655 873 425	8.441 437 500	8.441 726 563	2.48E-02	2.47E-02	plus
	$\pi/9 = 34,9\%$	2.265 177 571	2.265 671 875	2.265 625 000	-2.18E-04	-1.98E-04	plus
	$\pi/12 = 26,2\%$	1.734 198 376	1.733 218 750	1.733 187 500	5.65E-04	5.83E-04	moins

Les valeurs entre la forme analytique et numérique restent très bonnes malgré les faibles valeurs d'échantillon que le tableur peut fournir sans crasher.

Nous n'oublions pas que le taux de 52,4% est déjà le taux maximum théorique dans un modèle de sphère inclus par une matrice cubique ; alors que le taux théorique des renforts cylindriques inclus dans une matrice carrée atteint 78,5%.

Pour des taux volumiques similaires, le modèle sphérique à l'air d'indiquer que les renforts sphériques semblent plus intéressants que les renforts fibrillaires ; cependant, il ne faut pas oublier que les diamètres ne sont pas comparables aux taux volumiques directement entre les formes sphériques et cylindriques.

## **Bibliographie**

- [1] J. C. H. Affdl et J. L. Kardos, « The Halpin-Tsai equations: A review », *Polym. Eng. Sci.*, vol. 16, n° 5, p. 344-352, mai 1976, doi: 10.1002/pen.760160512.
- [2] J.-M. Berthelot, « Mécanique des Matériaux et Structures Composites », p. 667.
- [3] A. Berthereau et E. Dallies, « Fibres de verre de renforcement », p. 25, 2008.
- [4] C. Binetruy, « Estimation des propriétés mécaniques des polymères renforcés », p. 19, 2014.
- [5] G. Dupupet, « Fibres de carbone », p. 22, 2008.
- [6] X. L. Ji, J. K. Jing, W. Jiang, et B. Z. Jiang, « Tensile modulus of polymer nanocomposites », *Polym. Eng. Sci.*, vol. 42, n° 5, p. 983-993, mai 2002, doi: 10.1002/pen.11007.
- [7] A. L. Kalamkarov, I. V. Andrianov, et V. V. Danishevs'kyi, « Asymptotic Homogenization of Composite Materials and Structures », *Applied Mechanics Reviews*, vol. 62, n° 3, p. 030802, mai 2009, doi: 10.1115/1.3090830.
- [8] R. Pinzelli, « Fibres aramides pour matériaux composites », p. 16, 1995.
- [9] C. A. Rezende, F. C. Bragança, T. R. Doi, L.-T. Lee, F. Galembeck, et F. Boué, « Natural rubber-clay nanocomposites: Mechanical and structural properties », *Polymer*, vol. 51, n° 16, p. 3644-3652, juill. 2010, doi: 10.1016/j.polymer.2010.06.026.
- [10] F. Saadat, V. Birman, S. Thomopoulos, et G. M. Genin, « Effective elastic properties of a composite containing multiple types of anisotropic ellipsoidal inclusions, with application to the attachment of tendon to bone », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 82, p. 367-377, sept. 2015, doi: 10.1016/j.jmps.2015.05.017.
- [11] C. Sun, P. Saffari, R. Ranade, K. Sadeghipour, et G. Baran, « Finite element analysis of elastic property bounds of a composite with randomly distributed particles », *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 38, n° 1, p. 80-86, janv. 2007, doi: 10.1016/j.compositesa.2006.01.010.
- [12] H. Teng, « A New Incremental Formulation of Elastic-Plastic Deformation of Two-Phase Particulate Composite Materials », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 81, n° 6, p. 061006, juin 2014, doi: 10.1115/1.4026557.
- [13] P. Vannucci, « Matériaux composites structuraux », p. 269.
- [14] Y.-P. Wu, Q.-X. Jia, D.-S. Yu, et L.-Q. Zhang, « Modeling Young's modulus of rubber-clay nanocomposites using composite theories », *Polymer Testing*, vol. 23, n° 8, p. 903-909, déc. 2004, doi: 10.1016/j.polymertesting.2004.05.004.
- [15] Y. Zare et K. Y. Rhee, « Tensile modulus of polymer/CNT nanocomposites by effective volume fraction of nanoparticles as a function of CNT properties in the network: Tensile Modulus of Polymer/CNT Nanocomposites », *Polym. Adv. Technol.*, vol. 28, n° 11, p. 1448-1452, nov. 2017, doi: 10.1002/pat.4021.
- [16] V. V. Zuev, « Polymer Nanocomposites Containing Fullerene C60 Nanofillers », *Macromol. Symp.*, vol. 301, n° 1, p. 157-161, mars 2011, doi: 10.1002/masy.201150320.