Polos e Autovalores em SLIT

Prof. Luciano Daniel

31 de dezembro de 2025

Resumo

Este texto é estritamente didático e não tem qualquer pretensão de apresentar novidade científica. Seu propósito é servir como material de apoio para aulas de Teoria de Controle, organizando definições e resultados clássicos sobre a relação entre autovalores de uma realização em espaço de estados e polos/zeros da matriz de transferência. Em particular, demonstra-se que os polos finitos de $\mathbf{G}(s)$ (definidos de maneira invariante, no caso MIMO – *multiple-input multiple-output* – via Smith–McMillan) satisfazem sempre a inclusão

$$\{\text{polos finitos de } \mathbf{G}\} \subseteq \operatorname{spec}(\mathbf{A}),$$

e apresenta-se um contraexemplo onde a inclusão é estrita, evidenciando que autovalores podem existir sem aparecer como polos na relação entrada–saída. Como complemento, incluem-se a matriz de Rosenbrock e a noção de zeros invariantes para organizar a discussão de cancelamentos polo–zero, bem como a condição clássica de minimalidade sob a qual ocorre igualdade.

1 Enunciado do problema

Considere um sistema linear invariante no tempo (SLIT) contínuo finito-dimensional em espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{1}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{2}$$

com $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$. A matriz de transferência associada é

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \tag{3}$$

A tese a ser estabelecida é:

> *Os polos finitos de* $\mathbf{G}(s)$ *pertencem sempre a* $\operatorname{spec}(\mathbf{A})$*; porém pode haver autovalores de* $\mathbf{A}$ *que não aparecem como polos de* $\mathbf{G}(s)$*, isto é, os polos formam um subconjunto (em geral próprio) de* $\operatorname{spec}(\mathbf{A})$.

2 Funções racionais, polos e autovalores

2.1 Funções racionais e polos (caso escalar)

Definição 1 (Função racional e polos)**.** Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é *racional* se $f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ com $n, d \in \mathbb{C}[s]$, $d \not\equiv 0$. Um ponto $s_0 \in \mathbb{C}$ é *polo* de f se f não é analítica em s_0 e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(s - s_0)^k f(s)$ é analítica e não nula em s_0. Equivalente: em forma irredutível (coprima), polos são raízes de $d(s)$ com multiplicidades. [2, 3]

Observação 1 (Escopo: polos finitos e funções próprias)**.** Nesta nota, "polo" refere-se a *polo finito*. Para funções de transferência impróprias podem existir polos no infinito; ver [2, 3, 6]. Assume-se $\mathbf{G}(s)$ própria no sentido usual para evitar discussões de estrutura em ∞.

2.2 Matrizes racionais, singularidades e posto normal

Definição 2 (Matriz racional)**.** Uma matriz $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}(s)^{p\times m}$ é uma matriz cujas entradas são funções racionais em s.

Definição 3 (Posto normal)**.** O *posto normal* de $\mathbf{G}(s)$ é

$$\operatorname{nrank} \mathbf{G} \;=\; \max_{s\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{P}} \operatorname{rank} \mathbf{G}(s),$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto discreto de polos finitos de $\mathbf{G}(s)$ (pontos onde alguma entrada diverge) e o máximo é atingido para quase todo s (isto é, exceto em um conjunto discreto onde ocorrem perdas de posto). [2, 3]

Observação 2 (Singularidades de matriz racional)**.** Uma matriz racional pode ter singularidades finitas (pontos onde alguma entrada tem polo) e também pontos de perda de posto. Os conceitos invariantes de polos e zeros em MIMO devem capturar essas estruturas de modo independente de fatorações não-únicas; por isso introduz-se Smith–McMillan e, para zeros invariantes, Rosenbrock. [2, 3, 5, 11]

2.3 Autovalores e polinômio característico

Definição 4 (Autovalores)**.** Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Equivalente: λ é raiz do polinômio característico $\chi_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. [7]

3 Polos em MIMO

Nesta seção, "MIMO" significa *multiple-input multiple-output*; analogamente, "SISO" significa *single-input single-output*. A motivação para introduzir Smith–McMillan é que, em MIMO, polos não devem ser definidos "entrada a entrada", mas de maneira invariante. [2, 3, 11]

Definição 5 (Matriz unimodular)**.** Uma matriz polinomial quadrada $\mathbf{U}(s)$ é *unimodular* se $\det \mathbf{U}(s)$ é uma constante não nula. Nesse caso, $\mathbf{U}(s)$ é inversível sobre $\mathbb{C}[s]$ e $\mathbf{U}(s)^{-1}$ também é polinomial. [2, 3]

Lema 1 (Unimodulares não criam polos finitos)**.** *Se* $\mathbf{U}(s)$ *é unimodular e* $\mathbf{H}(s)$ *é uma matriz racional, então* $\mathbf{U}(s)\mathbf{H}(s)$ *e* $\mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s)$ *têm exatamente os mesmos polos finitos de* $\mathbf{H}(s)$*.*

Demonstração. Como $\mathbf{U}(s)$ e $\mathbf{U}(s)^{-1}$ são polinomiais, suas entradas são analíticas em todo $s \in \mathbb{C}$ e não possuem polos finitos. Logo, multiplicar por $\mathbf{U}(s)$ não pode introduzir singularidades finitas; e como $\mathbf{H}(s) = \mathbf{U}(s)^{-1}(\mathbf{U}(s)\mathbf{H}(s))$, também não pode removê-las. O mesmo vale à direita. □

Definição 6 (Forma de Smith–McMillan)**.** Seja $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}(s)^{p\times m}$ com posto normal $r = \operatorname{nrank} \mathbf{G}$. Existem unimodulares $\mathbf{U}(s), \mathbf{V}(s)$ tais que

$$\mathbf{U}(s)\,\mathbf{G}(s)\,\mathbf{V}(s) = \operatorname{diag}\left(\frac{n_1(s)}{d_1(s)}, \dots, \frac{n_r(s)}{d_r(s)}, 0, \dots, 0\right), \tag{4}$$

onde n_i e d_i são coprimos e $d_{i+1} \mid d_i$ (isto é, $d_r \mid d_{r-1} \mid \cdots \mid d_1$). [2,3,12]

Definição 7 (Polos e zeros (McMillan))**.** As raízes dos polinômios $d_i(s)$ em (4) (com multiplicidades) definem os **polos finitos** de $\mathbf{G}(s)$. As raízes dos $n_i(s)$ definem os **zeros finitos** (estrutura de McMillan) de $\mathbf{G}(s)$. [2,3,6]

Observação 3 (Invariância)**.** A estrutura de polos e zeros definida por (4) é invariante porque (i) unimodulares não introduzem polos finitos (Lema anterior) e (ii) os pares (n_i, d_i) são tomados coprimos, isto é, cancelamentos internos são removidos na representação canônica. [2,3,11]

4 Teorema central

4.1 Lema do resolvente

Lema 2 (Resolvente via adjunta)**.** *Para* $s \in \mathbb{C}$ *tal que* $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$*, vale*

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}. \tag{5}$$

Demonstração. Segue da identidade $\mathbf{M}^{-1} = \operatorname{adj}(\mathbf{M})/\det(\mathbf{M})$ para $\mathbf{M}$ inversível. [7] □

4.2 Prova da inclusão

Teorema 1 (Inclusão fundamental: polos $\subseteq$ autovalores)**.** *Considere o sistema* (1)–(2) *e* $\mathbf{G}(s)$ *dado por* (3)*. Então todo polo* finito *de* $\mathbf{G}(s)$ *pertence a* $\operatorname{spec}(\mathbf{A})$*:*

$$\{\textit{polos finitos de } \mathbf{G}\} \subseteq \operatorname{spec}(\mathbf{A}). \tag{6}$$

Demonstração. Pelo Lema (5), para s com $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}\ \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}.$$

O termo $\mathbf{D}$ é constante, logo não introduz polos finitos.

A matriz $\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ tem entradas polinomiais em s (grau no máximo $n-1$). Portanto, cada entrada de $\mathbf{C}\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{B}$ é um polinômio em s. Conclui-se que cada entrada $g_{ij}(s)$ de $\mathbf{G}(s)$ é racional e que seus possíveis polos finitos estão contidos no conjunto de raízes de $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$.

Como as raízes de $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ são precisamente os autovalores de $\mathbf{A}$, toda singularidade finita de $\mathbf{G}(s)$ só pode ocorrer em $\operatorname{spec}(\mathbf{A})$. Por definição, os polos finitos (no sentido invariante de Smith–McMillan) são singularidades finitas que persistem após quaisquer pré/pós-multiplicações unimodulares e após remover cancelamentos na forma canônica; pelo Lema "unimodulares não criam polos finitos", não surgem polos fora do conjunto de singularidades finitas já presentes em $\mathbf{G}(s)$. Logo, os polos finitos de $\mathbf{G}(s)$ pertencem a $\operatorname{spec}(\mathbf{A})$. $\square$

Observação 4 (O que o Teorema 1 não afirma)**.** A inclusão (6) não implica que todo autovalor de $\mathbf{A}$ seja polo de $\mathbf{G}(s)$. A inclusão pode ser estrita; os mecanismos típicos são (i) dinâmicas internas não excitadas e/ou não observadas e (ii) cancelamentos polo–zero (no sentido entrada–saída). Ambos são formalizados em seguida. [8, 9]

5 Mecanismos de não-minimalidade e cancelamentos polo–zero

5.1 Controlabilidade, observabilidade e minimalidade

Definição 8 (Controlabilidade e observabilidade)**.** O par $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é **controlável** se a matriz

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

tem posto n. O par $(\mathbf{C},\mathbf{A})$ é **observável** se a matriz

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem posto n. [1, 3]

Definição 9 (Realização mínima e grau de McMillan)**.** Uma realização (1)–(2) de $\mathbf{G}(s)$ é **mínima** se é controlável e observável. Equivalentemente, sua ordem é igual ao *grau de McMillan* de $\mathbf{G}(s)$ (soma das ordens dos polos na forma de Smith–McMillan). [2–4]

Proposição 1 (Igualdade em realizações mínimas (fato clássico))**.** *Se* (1)*–*(2) *é uma realização mínima de* $\mathbf{G}(s)$*, então (com multiplicidades de McMillan)*

$$\{\textit{polos finitos de } \mathbf{G}\} = \operatorname{spec}(\mathbf{A}).$$

Em contrapartida, se a realização não é mínima, pode ocorrer inclusão estrita. [2, 3, 6]

5.2 Zeros invariantes e matriz de Rosenbrock

Definição 10 (Matriz de Rosenbrock (matriz de sistema))**.** Define-se a matriz

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}(s)^{(n+p)\times(n+m)}. \tag{7}$$

Definição 11 (Zeros invariantes)**.** Seja nrank $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ o posto normal de $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$. Um ponto $s_0 \in \mathbb{C}$ é um **zero invariante** (ou zero de transmissão) se ocorre perda de posto [2, 3, 5]:

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{\mathcal{R}}(s_0) < \operatorname{nrank} \boldsymbol{\mathcal{R}}. \tag{8}$$

Observação 5 (Relação com Smith–McMillan)**.** Sob hipóteses padrão (em particular, para realizações mínimas), os zeros invariantes definidos por (8) coincidem com os zeros finitos da forma de Smith–McMillan de $\mathbf{G}(s)$. [2, 3, 5, 6]

Proposição 2 (Cancelamento polo–zero em termos invariantes (descrição))**.** *Um cancelamento polo–zero na descrição entrada–saída equivale, na forma de Smith–McMillan, ao fato de que uma determinada realização pode produzir expressões intermediárias onde numeradores e denominadores possuem fatores comuns, enquanto a forma* (4) *remove tais fatores (coprimeness). Em sistemas SISO, isso se reduz ao cancelamento de fatores comuns entre o numerador e o denominador de* $\mathbf{G}(s)$ *na passagem para a forma irredutível (coprima); em MIMO, a forma* (4) *é a maneira canônica de eliminar esses cancelamentos. A caracterização* (8) *fornece um critério invariante para zeros finitos e, portanto, para a discussão de cancelamentos associados à estrutura de realização. [2, 3, 5, 10, 11]*

6 Exemplos

6.1 Exemplo 1: autovalor que não é polo (modo invisível)

Exemplo 1. Considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

Então

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{s+1}.$$

Logo,

$$\operatorname{spec}(\mathbf{A}) = \{-1, -2\}, \qquad \{\text{polos de } \mathbf{G}\} = \{-1\},$$

de modo que $\{\text{polos de } \mathbf{G}\} \subset \operatorname{spec}(\mathbf{A})$ com inclusão estrita.

Observação 6. O autovalor -2 corresponde a uma dinâmica não excitada pela entrada (subespaço não-controlável associado) e não observada na saída (subespaço não-observável associado), portanto não aparece na relação entrada–saída. [2, 3, 8]

6.2 Exemplo 2: cancelamento polo–zero e zero invariante (SISO)

Exemplo 2. Considere a realização SISO ($m = p = 1$) com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

Como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}, \qquad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix},$$

tem-se

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{2}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Assim, $\operatorname{spec}(\mathbf{A}) = \{-1, -2\}$, mas $\mathbf{G}(s)$ possui apenas o polo -1; o fator $(s+2)$ cancela na passagem para a forma irredutível.

Além disso, o ponto $s_0 = -2$ não é um zero finito de $\mathbf{G}(s)$ (pois $\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s+1}$), mas aparece como cancelamento polo–zero: em uma representação não coprima surge um fator $(s+2)$ no numerador que cancela com o denominador (singularidade removível). Para esta realização (não mínima), $s_0 = -2$ aparece como zero invariante via Rosenbrock. De fato, a matriz de Rosenbrock é

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & -1 \\ 0 & s+2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que rank $\boldsymbol{\mathcal{R}}(s)$ é maximal para quase todo s, mas ocorre perda de posto em $s = -2$, caracterizando -2 como zero invariante (no sentido (8)). [3, 5, 10]

Observação 7. O Exemplo 1 mostra inclusão estrita sem necessidade de um "zero correspondente" em $\mathbf{G}(s)$: a dinâmica pode simplesmente não estar presente no mapa entrada–saída. O Exemplo 2 evidencia o mecanismo clássico de cancelamento polo–zero, no qual um autovalor aparece como fator em $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, mas não persiste como polo da matriz de transferência após remoção de fatores comuns. [8, 9]

7 Conclusão

Demonstrou-se que, para um SLIT com realização (1)–(2), todo polo finito da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ pertence a $\operatorname{spec}(\mathbf{A})$ (Teorema 1). Em seguida, exemplos explícitos mostraram que a inclusão pode ser estrita: autovalores podem não aparecer como polos por invisibilidade entrada–saída ou por cancelamentos polo–zero. Por fim, a matriz de Rosenbrock e a definição de zeros invariantes via perda de posto foram incluídas como ferramenta conceitual e técnica para caracterizar zeros de transmissão e organizar a discussão de cancelamentos em sistemas MIMO.

Referências

[1] R. E. Kalman, "On the General Theory of Control Systems," *Proceedings of the 1st IFAC Congress*, Moscow, 1960.

[2] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980.

[3] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed., Oxford University Press, 1999.

[4] W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, 1996.

[5] H. H. Rosenbrock, *State-Space and Multivariable Theory*, Wiley, 1970.

[6] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

[7] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2013.

[8] M. Fliess, "A simple definition of hidden modes, poles and zeros," *Kybernetika*, vol. 27, no. 3, pp. 186–189, 1991.

[9] O. R. Gonzalez and P. J. Antsaklis, "Hidden Modes of Two Degrees of Freedom Systems in Control Design," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 4, pp. 502–506, Apr. 1990.

[10] B. A. Francis and W. M. Wonham, "The role of transmission zeros in linear multivariable regulators," *International Journal of Control*, vol. 22, no. 5, pp. 657–681, 1975.

[11] H. Bourlès and M. Fliess, "Poles and Zeros of Linear Systems: An Invariant Approach," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 28, issue 8, pp. 383–388, Jul. 1995.

[12] V. Noferini and P. Van Dooren, "Computing a compact local Smith–McMillan form," *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 73, no. 2, pp. 305–321, 2025.