

# Polos e Autovalores em SLIT

Prof. Luciano Daniel

21 de dezembro de 2025

## Resumo

Este texto é estritamente didático e não tem qualquer pretensão de apresentar novidade científica. Seu propósito é servir como material de apoio para aulas de Teoria de Controle, organizando definições e resultados clássicos sobre a relação entre autovalores de uma realização em espaço de estados e polos/zeros da matriz de transferência. Em particular, demonstra-se que os polos finitos de  $\mathbf{G}(s)$  (definidos de maneira invariante, no caso MIMO – *multiple-input multiple-output* – via Smith–McMillan) satisfazem sempre a inclusão

$$\{\text{polos finitos de } \mathbf{G}\} \subseteq \text{spec}(\mathbf{A}),$$

e apresenta-se um contraexemplo onde a inclusão é estrita, evidenciando que autovalores podem existir sem aparecer como polos na relação entrada-saída. Como complemento, incluem-se a matriz de Rosenbrock e a noção de zeros invariantes para organizar a discussão de cancelamentos polo-zero, bem como a condição clássica de minimalidade sob a qual ocorre igualdade.

## 1 Enunciado do problema

Considere um sistema linear invariante no tempo (SLIT) contínuo finito-dimensional em espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2)$$

com  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ . A matriz de transferência associada é

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3)$$

A tese a ser estabelecida é:

*Os polos finitos de  $\mathbf{G}(s)$  pertencem sempre a  $\text{spec}(\mathbf{A})$ ; porém pode haver autovalores de  $\mathbf{A}$  que não aparecem como polos de  $\mathbf{G}(s)$ , isto é, os polos formam um subconjunto (em geral próprio) de  $\text{spec}(\mathbf{A})$ .*

## 2 Funções racionais, polos e autovalores

### 2.1 Funções racionais e polos (caso escalar)

**Definição 1** (Função racional e polos). Uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é *racional* se  $f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  com  $n, d \in \mathbb{C}[s]$ ,  $d \neq 0$ . Um ponto  $s_0 \in \mathbb{C}$  é *polo* de  $f$  se  $f$  não é analítica em  $s_0$  e existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $(s - s_0)^k f(s)$  é analítica e não nula em  $s_0$ . Equivalente: em forma irredutível (coprima), polos são raízes de  $d(s)$  com multiplicidades. [2, 3]

**Observação 1** (Escopo: polos finitos e funções próprias). Nesta nota, “polo” refere-se a *polo finito*. Para funções de transferência impróprias podem existir polos no infinito; ver [2, 3, 6]. Assume-se  $\mathbf{G}(s)$  própria no sentido usual para evitar discussões de estrutura em  $\infty$ .

### 2.2 Matrizes racionais, singularidades e posto normal

**Definição 2** (Matriz racional). Uma matriz  $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}(s)^{p \times m}$  é uma matriz cujas entradas são funções racionais em  $s$ .

**Definição 3** (Posto normal). O *posto normal* de  $\mathbf{G}(s)$  é

$$\text{nrank } \mathbf{G} = \max_{s \in \mathbb{C}} \text{rank } \mathbf{G}(s),$$

onde o máximo é atingido para quase todo  $s$  (isto é, exceto em um conjunto discreto onde ocorrem perdas de posto). [2, 3]

**Observação 2** (Singularidades de matriz racional). Uma matriz racional pode ter singularidades finitas (pontos onde alguma entrada tem polo) e também pontos de perda de posto. Os conceitos invariantes de polos e zeros em MIMO devem capturar essas estruturas de modo independente de fatorações não-únicas; por isso introduz-se Smith–McMillan e, para zeros invariantes, Rosenbrock. [2, 3, 5, 11]

### 2.3 Autovalores e polinômio característico

**Definição 4** (Autovalores). Um escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  é autovalor de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se existe  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Equivalente:  $\lambda$  é raiz do polinômio característico  $\chi_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ . [7]

## 3 Polos em MIMO

Nesta seção, “MIMO” significa *multiple-input multiple-output*; analogamente, “SISO” significa *single-input single-output*. A motivação para introduzir Smith–McMillan é que, em MIMO, polos não devem ser definidos “entrada a entrada”, mas de maneira invariante. [2, 3, 11]

**Definição 5** (Matriz unimodular). Uma matriz polinomial quadrada  $\mathbf{U}(s)$  é *unimodular* se  $\det \mathbf{U}(s)$  é uma constante não nula. Nesse caso,  $\mathbf{U}(s)$  é inversível sobre  $\mathbb{C}[s]$  e  $\mathbf{U}(s)^{-1}$  também é polinomial. [2, 3]

**Lema 1** (Unimodulares não criam polos finitos). *Se  $\mathbf{U}(s)$  é unimodular e  $\mathbf{H}(s)$  é uma matriz racional, então  $\mathbf{U}(s)\mathbf{H}(s)$  e  $\mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s)$  têm exatamente os mesmos polos finitos de  $\mathbf{H}(s)$ .*

*Demonstração.* Como  $\mathbf{U}(s)$  e  $\mathbf{U}(s)^{-1}$  são polinomiais, suas entradas são analíticas em todo  $s \in \mathbb{C}$  e não possuem polos finitos. Logo, multiplicar por  $\mathbf{U}(s)$  não pode introduzir singularidades finitas; e como  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{U}(s)^{-1}(\mathbf{U}(s)\mathbf{H}(s))$ , também não pode removê-las. O mesmo vale à direita.  $\square$

**Definição 6** (Forma de Smith–McMillan). Seja  $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}(s)^{p \times m}$  com posto normal  $r = \text{nrank } \mathbf{G}$ . Existem unimodulares  $\mathbf{U}(s), \mathbf{V}(s)$  tais que

$$\mathbf{U}(s) \mathbf{G}(s) \mathbf{V}(s) = \text{diag} \left( \frac{n_1(s)}{d_1(s)}, \dots, \frac{n_r(s)}{d_r(s)}, 0, \dots, 0 \right), \quad (4)$$

onde  $n_i$  e  $d_i$  são coprimos e  $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$ . [2, 3, 12]

**Definição 7** (Polos e zeros (McMillan)). As raízes dos polinômios  $d_i(s)$  em (4) (com multiplicidades) definem os **polos finitos** de  $\mathbf{G}(s)$ . As raízes dos  $n_i(s)$  definem os **zeros finitos** (estrutura de McMillan) de  $\mathbf{G}(s)$ . [2, 3, 6]

**Observação 3** (Invariância). A estrutura de polos e zeros definida por (4) é invariante porque (i) unimodulares não introduzem polos finitos (Lema anterior) e (ii) os pares  $(n_i, d_i)$  são tomados coprimos, isto é, cancelamentos internos são removidos na representação canônica. [2, 3, 11]

## 4 Teorema central

### 4.1 Lema do resolvente

**Lema 2** (Resolvente via adjunta). *Para  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$ , vale*

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}. \quad (5)$$

*Demonstração.* Segue da identidade  $\mathbf{M}^{-1} = \text{adj}(\mathbf{M})/\det(\mathbf{M})$  para  $\mathbf{M}$  inversível. [7]  $\square$

### 4.2 Prova da inclusão

**Teorema 1** (Inclusão fundamental: polos  $\subseteq$  autovalores). *Considere o sistema (1)–(2) e  $\mathbf{G}(s)$  dado por (3). Então todo polo finito de  $\mathbf{G}(s)$  pertence a  $\text{spec}(\mathbf{A})$ :*

$$\{\text{polos finitos de } \mathbf{G}\} \subseteq \text{spec}(\mathbf{A}). \quad (6)$$

*Demonstração.* Pelo Lema (5), para  $s$  com  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$ ,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}.$$

O termo  $\mathbf{D}$  é constante, logo não introduz polos finitos.

A matriz  $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  tem entradas polinomiais em  $s$  (grau no máximo  $n - 1$ ). Portanto, cada entrada de  $\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}$  é um polinômio em  $s$ . Conclui-se que cada entrada  $g_{ij}(s)$  de  $\mathbf{G}(s)$  é racional e que seus possíveis polos finitos estão contidos no conjunto de raízes de  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ .

Como as raízes de  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  são precisamente os autovalores de  $\mathbf{A}$ , toda singularidade finita de  $\mathbf{G}(s)$  só pode ocorrer em  $\text{spec}(\mathbf{A})$ . Por definição, os polos finitos (no sentido invariante de Smith–McMillan) são singularidades finitas que persistem após quaisquer pré/pós-multiplicações unimodulares e após remover cancelamentos na forma canônica; pelo Lema “unimodulares não criam polos finitos”, não surgem polos fora do conjunto de singularidades finitas já presentes em  $\mathbf{G}(s)$ . Logo, os polos finitos de  $\mathbf{G}(s)$  pertencem a  $\text{spec}(\mathbf{A})$ .  $\square$

**Observação 4** (O que o Teorema 1 não afirma). A inclusão (6) não implica que todo autovalor de  $\mathbf{A}$  seja polo de  $\mathbf{G}(s)$ . A inclusão pode ser estrita; os mecanismos típicos são (i) dinâmicas internas não excitadas e/ou não observadas e (ii) cancelamentos polo–zero (no sentido entrada–saída). Ambos são formalizados em seguida. [8, 9]

## 5 Mecanismos de não-minimalidade e cancelamentos polo–zero

### 5.1 Controlabilidade, observabilidade e minimalidade

**Definição 8** (Controlabilidade e observabilidade). O par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é **controlável** se a matriz

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

tem posto  $n$ . O par  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  é **observável** se a matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem posto  $n$ . [1, 3]

**Definição 9** (Realização mínima e grau de McMillan). Uma realização (1)–(2) de  $\mathbf{G}(s)$  é **mínima** se é controlável e observável. Equivalentemente, sua ordem é igual ao *grau de McMillan* de  $\mathbf{G}(s)$  (soma das ordens dos polos na forma de Smith–McMillan). [2–4]

**Proposição 1** (Igualdade em realizações mínimas (fato clássico)). *Se (1)–(2) é uma realização mínima de  $\mathbf{G}(s)$ , então (com multiplicidades de McMillan)*

$$\{\text{polos finitos de } \mathbf{G}\} = \text{spec}(\mathbf{A}).$$

*Em contrapartida, se a realização não é mínima, pode ocorrer inclusão estrita. [2, 3, 6]*

## 5.2 Zeros invariantes e matriz de Rosenbrock

**Definição 10** (Matriz de Rosenbrock (matriz de sistema)). Define-se a matriz

$$\mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}(s)^{(n+p) \times (n+m)}. \quad (7)$$

**Definição 11** (Zeros invariantes). Seja  $\text{nrank } \mathcal{R}$  o posto normal de  $\mathcal{R}(s)$ . Um ponto  $s_0 \in \mathbb{C}$  é um **zero invariante** (ou zero de transmissão) se ocorre perda de posto [2, 3, 5]:

$$\text{rank } \mathcal{R}(s_0) < \text{nrank } \mathcal{R}. \quad (8)$$

**Observação 5** (Relação com Smith–McMillan). Sob hipóteses padrão (em particular, para realizações mínimas), os zeros invariantes definidos por (8) coincidem com os zeros finitos da forma de Smith–McMillan de  $\mathbf{G}(s)$ . [2, 3, 5, 6]

**Proposição 2** (Cancelamento polo–zero em termos invariantes (descrição)). *Um cancelamento polo–zero na descrição entrada–saída equivale, na forma de Smith–McMillan, ao fato de que uma determinada realização pode produzir expressões intermediárias onde numeradores e denominadores possuem fatores comuns, enquanto a forma (4) remove tais fatores (coprimeness). Em sistemas SISO, isso se reduz ao cancelamento de fatores comuns entre o numerador e o denominador de  $\mathbf{G}(s)$  em forma irredutível; em MIMO, a forma (4) é a maneira canônica de eliminar esses cancelamentos. A caracterização (8) fornece um critério invariante para zeros finitos e, portanto, para a discussão de cancelamentos associados à estrutura de realização. [2, 3, 5, 10, 11]*

## 6 Exemplos

### 6.1 Exemplo 1: autovalor que não é polo (modo invisível)

**Exemplo 1.** Considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D} = 0.$$

Então

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{s+1}.$$

Logo,

$$\text{spec}(\mathbf{A}) = \{-1, -2\}, \quad \{\text{polos de } \mathbf{G}\} = \{-1\},$$

de modo que  $\{\text{polos de } \mathbf{G}\} \subset \text{spec}(\mathbf{A})$  com inclusão estrita.

**Observação 6.** O autovalor  $-2$  corresponde a uma dinâmica não excitada pela entrada (subespaço não-controlável associado) e não observada na saída (subespaço não-observável associado), portanto não aparece na relação entrada–saída. [2, 3, 8]

## 6.2 Exemplo 2: cancelamento polo-zero e zero invariante (SISO)

**Exemplo 2.** Considere a realização SISO ( $m = p = 1$ ) com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

Como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}, \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix},$$

tem-se

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Assim,  $\text{spec}(\mathbf{A}) = \{-1, -2\}$ , mas  $\mathbf{G}(s)$  possui apenas o polo  $-1$ ; o fator  $(s+2)$  cancela na passagem para a forma irredutível.

Além disso, o ponto  $s_0 = -2$  é um zero finito de  $\mathbf{G}(s)$  (na expressão não reduzida) e aparece como zero invariante via Rosenbrock. De fato, a matriz de Rosenbrock é

$$\mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & -1 \\ 0 & s+2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que  $\text{rank } \mathcal{R}(s)$  é maximal para quase todo  $s$ , mas ocorre perda de posto em  $s = -2$ , caracterizando  $-2$  como zero invariante (no sentido (8)). [3, 5, 10]

**Observação 7.** O Exemplo 1 mostra inclusão estrita sem necessidade de um “zero correspondente” em  $\mathbf{G}(s)$ : a dinâmica pode simplesmente não estar presente no mapa entrada-saída. O Exemplo 2 evidencia o mecanismo clássico de cancelamento polo-zero, no qual um autovalor aparece como fator em  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , mas não persiste como polo da matriz de transferência após remoção de fatores comuns. [8, 9]

## 7 Conclusão

Demonstrou-se que, para um SLIT com realização (1)–(2), todo polo finito da matriz de transferência  $\mathbf{G}(s)$  pertence a  $\text{spec}(\mathbf{A})$  (Teorema 1). Em seguida, exemplos explícitos mostraram

que a inclusão pode ser estrita: autovalores podem não aparecer como polos por invisibilidade entrada-saída ou por cancelamentos polo-zero. Por fim, a matriz de Rosenbrock e a definição de zeros invariantes via perda de posto foram incluídas como ferramenta conceitual e técnica para caracterizar zeros de transmissão e organizar a discussão de cancelamentos em sistemas MIMO.

## Referências

- [1] R. E. Kalman, “On the General Theory of Control Systems,” *Proceedings of the 1st IFAC Congress*, Moscow, 1960.
- [2] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980.
- [3] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed., Oxford University Press, 1999.
- [4] W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, 1996.
- [5] H. H. Rosenbrock, *State-Space and Multivariable Theory*, Wiley, 1970.
- [6] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.
- [7] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2013.
- [8] M. Fliess, “A simple definition of hidden modes, poles and zeros,” *Kybernetika*, vol. 27, no. 3, pp. 186–189, 1991.
- [9] O. R. Gonzalez and P. J. Antsaklis, “Hidden Modes of Two Degrees of Freedom Systems in Control Design,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 4, pp. 502–506, Apr. 1990.
- [10] B. A. Francis and W. M. Wonham, “The role of transmission zeros in linear multivariable regulators,” *International Journal of Control*, vol. 22, no. 5, pp. 657–681, 1975.
- [11] H. Bourlès and M. Fliess, “Poles and Zeros of Linear Systems: An Invariant Approach,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 28, issue 8, pp. 383–388, Jul. 1995.
- [12] V. Noferini and P. Van Dooren, “Computing a compact local Smith–McMillan form,” *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 73, no. 2, pp. 305–321, 2025.